Лимеси: ①

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in N)(\forall n\in N)(n\geq n_0 \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon)$

$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in N)(\forall n\in N)(n\geq n_0 \Rightarrow a_n>\varepsilon)$

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in N)(\forall n\in N)(n\geq n_0 \Rightarrow a_n<-\varepsilon)$

$\lim_{n\to a} f(x) = A \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in D)(0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in D)(x>\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon)$

$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\forall x\in D)(0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>\varepsilon)$

$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in D)(0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)<-\varepsilon)$

Дефиниција лимеса низа: Број a је лимес (гранична вредност) низа a_n акко $(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in N)(\forall n\in N)(n\geq n_0 \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon)$ $a=\lim_{x\to\infty} a_n$

$|x-y|$ = растојање између a и b

$|x-a|<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<x-a<\varepsilon \Leftrightarrow a-\varepsilon<x<a+\varepsilon \Leftrightarrow$
$x\in(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

$|a_n-a|$

$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ε - околина тачке A

Теорема о лимесу збира, производа, количника:
Ако су a_n и b_n конвергентни, $\lim_{n\to\infty} a_n=a$, $\lim_{n\to\infty} b_n=b$. Тада је:

а) $\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$ г) $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b$

б) $\lim_{n\to\infty}(c\cdot a_n)=c\cdot a, \forall c\in R$

в) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}$, ако је $b\neq 0$ и $b_n\neq 0$, $\forall n\in N$

Теорема о конвергенцији монотоних низова

Сваки монотон и ограничен низ је конвергентан, прецизније:

1. ако је (a_n) растући и ограничен са десне стране, онда је $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n\in N\}$

2. ако је (a_n) опадајући и ограничен са леве стране онда је $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n\in N\}$

Доказ: $(a_n)\uparrow$, ограничен са десне, аксиома супремума $\Rightarrow \exists.\ M=\sup\{a_n : n\in N\}$

ε-карактеризација супремума $\Rightarrow (\exists n_0) M<\varepsilon + a_{n_0}$

$$n\geq n_0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} M<\varepsilon + a_{n_0} \\ a_{n_0}\leq a_n \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} M<\varepsilon + a_n \\ 0\leq \underbrace{M-a_n}_{\Downarrow \ |a_n - M|} <\varepsilon \end{array}$$

$$n\geq n_0 \Rightarrow |a_n - M|<\varepsilon$$

$$\lim a_n = M$$

* $(a_n)\uparrow$ и није ограничен са десне стране $\Rightarrow$
$\Rightarrow \lim a_n = +\infty$

Деф. Кошијев општи критеријум конвергенције низова: Низ (a_n) је Кошијев акко $(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in N)$
$(\forall n,p\in N)(n\geq n_0 \Rightarrow |a_{n+p}-a_n|<\varepsilon)$

(Т) Сваки Кошијев низ је ограничен

Доказ: $\varepsilon = 1$ $(\exists n_0)(\forall n,p)(n\geq n_0 \Rightarrow |a_{n+p}-a_n|<\overset{1}{\overset{\shortparallel}{\varepsilon}})$

$n=n_0$: $|a_{n_0+p} - a_{n_0}| < 1$, $\forall p\in N$

$|x|-|y|\leq |x-y|$

$x = a_{n_0+p}$ $\qquad |a_{n_0+p}| < 1 + |a_{n_0}|$, $\forall p$

$y = a_{n_0}$ $\qquad |a_n| < 1 + |a_{n_0}|$, $\forall n\geq n_0+1$

$\alpha = \max\{|a_1|,\dots,|a_{n_0}|\}$ $\quad |a_n|<\alpha$, $\forall n = 1,2,\dots,n_0$

$\beta = \max\{\alpha, 1+|a_{n_0}|\}$ $\quad |a_n|\leq\beta$, $\forall n\in N$

(Т) Низ је конвергентан акко је Кошијев.

Редови:

Деф. конвергенције реда: Ако низ S_n (n-та парцијална сума реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$) конвергира, онда кажемо да ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира и тада: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} S_n$ зовемо сума реда. Ако низ S_n дивергира онда кажемо да ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира.

Теорема Кошијев (Даламберов) критеријум конвергенције реда.

Коши: Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ је конвергентан акко $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in N)(\forall n,p\in N)(n\geq n_0 \Rightarrow |a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}|<\varepsilon)$

Доказ: $S_n \sum_{i=1}^{\infty} a_i$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвер $\Leftrightarrow$ (S_n) конвер $\Leftrightarrow$ (S_n) је Кошијев низ

$S_{n+p}-S_n = a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots a_{n+p}$

Последица (Кошијев критери. апсолут. конвертен.)

Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ је апсолутно конвергентан акко $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in N)(\forall n,p\in N)(n\geq n_0 \Rightarrow |a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\ldots+|a_{n+p}|<\varepsilon)$

Даламбер:

Нека је $a_n>0, \forall n$

а) Ако $\exists Q\in(0,1)$ такво да је $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq Q$ за $\forall n\geq k, k\in N$, онда је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергентан

б) Ако је $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$ за $\forall n\geq k, k\in N$, онда је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергентан

Доказ: а) $Q=\frac{Q^{n+1}}{Q^n}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq \frac{Q^{n+1}}{Q^n}$

$\left.0<Q<1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} Q^n \text{ конв.}\right\} \overset{II}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвер.

б) $\left.\begin{matrix}\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} 1 \text{ див}\end{matrix}\right\} \xrightarrow{II \text{ упоређени критериј.}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира

Лајбницов критеријум

Нека је: 1) $a_n \geq 0$

2) $(a_n) \searrow$

3) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Тада је $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ конвергентан

Алтернирајући (алтернативни) ред:

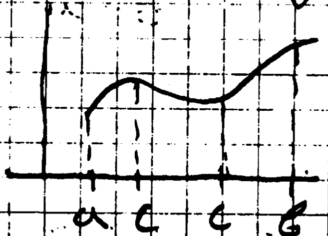
је ред облика $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ где су $a_n > 0$ за $\forall n$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n \,,\ a_n > 0 \right)$

Апсолутна и условна конвергенција реда:

Деф: Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ је апсолутно конвергентан акко је ред $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ конвергира

Деф: Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ је условно конвергентан акко је $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ дивергира

Т Фермова о средњој вредности: Нека је f непрекидна на затвореном интервалу $[a,b]$ и нека у тачки $c\in(a,b)$ има најмању или највећу вредност. Ако је диференцијабилна у тачки c онда је $f'(c)=0$



∃ тангента ∥ Ox

Доказ: у c max $\quad f'_-(c)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\overbrace{f(c+h)-f(c)}^{\le 0}}{h<0}\ge 0$

$f'_-(c)\ge 0$

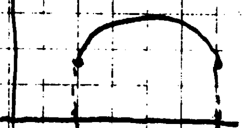
$f'_+(c)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\overbrace{f(c+h)-f(c)}^{\le 0}}{h>0}\le 0$

$f'_+(c)\le 0$

$$0\le f'_-(c)=f'(c)=f'_+(c)\le 0$$
$$\Downarrow$$
$$f'(c)=0$$

Т Ролова о средњој вредности: Нека је f непрекидна на $[a,b]$ на (a,b) и нека је $f(a)=f(b)$. Тада $\exists c\in(a,b)$ такво да је $f'(c)=0$

∃ тангента ∥ Ox



Доказ $\Rightarrow \exists \alpha,\beta\in[a,b]$ у α max f, у β min f

1° $\{\alpha,\beta\}=\{a,b\}\qquad x\in[a,b]$

$$\left.\begin{array}{l} f(\beta)\le f(x)\le f(\alpha)\\ f(a)=f(b)\Rightarrow f(\alpha)=f(\beta)\end{array}\right\} f(x)=f(\alpha)=const$$

$f'(x),\ \forall x\in(a,b)$

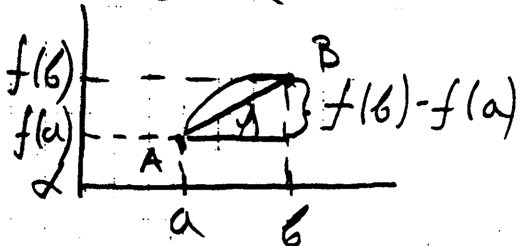
2° $\{\alpha,\beta\}\ne\{a,b\}$

Бар један од α,β је у (a,b). Њу означавамо са c

$\Downarrow$ Ферма

$f'(c)=0$

Т. Лагранжова о средњој вредности: Нека је ф-ја f непрекидна на $[a,b]$ и диференцијабилна на (a,b). Тада $\exists c\in(a,b)$ такво да је
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$



$$tg\,\varphi=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$f'(c)=tg\,\alpha \qquad \alpha=\varphi$$

теорема каже да постоји тангента паралелна са сечицом AB   AB: $y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$
$$\underbrace{y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)}_{\text{полином првог степена}}\Rightarrow$$
он је свуда непрекидан и свуда диференцијабилан на R $g(x)=\underset{\text{непр}}{f(x)}-y_{\text{непр}}$

$$\left.\begin{array}{l} g(x) \text{ непрекидна на } [a,b] \\ g(x) \text{ је диференц. на } (a,b) \\ g(a)=0 \\ g(b)=0 \end{array}\right\}\xRightarrow{\text{Ролове}} \exists c\in(a,b)\; g'(c)=0$$
$$g'(x)=f'(x)-y'=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$g'(c)=0$$
$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

Последица: Нека је I било какав интервал и нека је $f'(x)=0$ за $\forall x\in I$. Тада $\exists\alpha\in R$ такво да је $f(x)=\alpha$, $\forall x\in I$ тј. f је const на I. Доказ: Уочимо било које $a\in I$ → Лагранж на $[a,x]$
$x\in I$ $a<x$ $[a,x]$ f је диференцијабилна на $[a,x]\Rightarrow f$ је непрекидна на $[a,x]$ $(\exists c\in(a,x))$ $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)=0\Rightarrow f(x)=f(a)=\alpha$
Ако је $x<a$ гледамо интервал $[x,a]$

②

Т Кошијева о средњој вредности: Нека су ф-је f и g непрекидне на $[a,b]$ диференцијабилна на (a,b) и нека је $g'(x) \neq 0$ за $\forall x \in (a,b)$. Тада $\exists c \in (a,b)$ такво да је $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Доказ:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

$\Downarrow$

$F(x)$ је непрекидна на $[a,b]$, диференцијабилна на (a,b)

$F(a)=0$

$F(b)=0$

$\Downarrow$ Ролова теорема

$(\exists c \in (a,b))\ F'(c)=0$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x)$$

$$0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) \quad / : g'(c) \neq 0$$

Ако би било $g(a)=g(b) \overset{\text{Рол}}{\Rightarrow} (\exists d \in (a,b))\ g'(d)=0$

Монотоност функције

Деф: Нека $f: D_f \to R$ и нека је $S \subset D_f$ тада кажемо да је f:

1) растућа (монотона) на скупу S ако је $(\forall x_1, x_2 \in S)\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

2) неопадајућа (монотона) на скупу S ако је $(\forall x_1, x_2 \in S)\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

3) опадајућа —//— $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

4) нерастућа —//— $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Т. Нека је ф-ја диференцијабилна на (a,b), тада важи: 1° Ако је $f'(x)>0$ $\forall x\in(a,b)$ тада је f растућа на (a,b)
2° Ако је $f'(x)\geq 0$ $\forall x\in(a,b)$ — „ — неопадајућа
3° Ако је $f'(x)<0$ — „ — опадајућа
4° Ако је $f'(x)\leq 0$ — „ — нерастућа

Т. Локални min/max Тачка x_0 је тачка локалног максимума (односно локалног минимума) ф-је f акко постоји $\varepsilon>0$ такво да је $f(x)\leq f(x_0)$ (односно $f(x)\geq f(x_0)$) за $\forall x\in(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ x_0 је тачка локалног екстремума акко је x_0 тачка локалног максимума или локалног минимума

Конвексност функције

деф. Функција f је конвексна (односно конкавна) на интервалу I акко:

$(\forall x_1,x_2\in I)(\forall p_1,p_2\in[0,1])(p_1+p_2=1\Rightarrow f(p_1x_1+p_2x_2)\leq p_1f(x_1)+p_2f(x_2))$

$f\cup I$ конвексна (односн. $f(p_1x_1+p_2x_2)\geq p_1f(x_1)+p_2f(x_2)$)
$f\cap I$ конкавна

Превојна тачка нека је f непрекидна у $U_\delta(x_0)$ и нека у интервалима $(x_0-\delta, x_0)$ и $(x_0, x_0+\delta)$ има различиту конвексност тада се $M_0(x_0, f(x_0))$ назива превојна тачка графика ф-је $f(x)$.

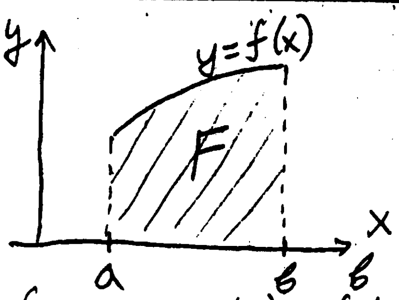
Асимтоте:

1° Ако је $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ (или $-\infty$) или је $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ (или $-\infty$) тада се права $x=a$ назива се вертикална асимптода ф-је f

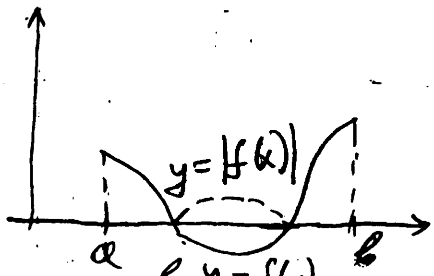
2° Ако је $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ тада се права $y=b$ назива хоризонтална асимптота ф-је f.

3° Ако је $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (-\infty)}} [f(x)-(mx+n)]=0$, тада се права $y=mx+n$ назива коса асимптота ф-је f када $x\to+\infty$ $(-\infty)$

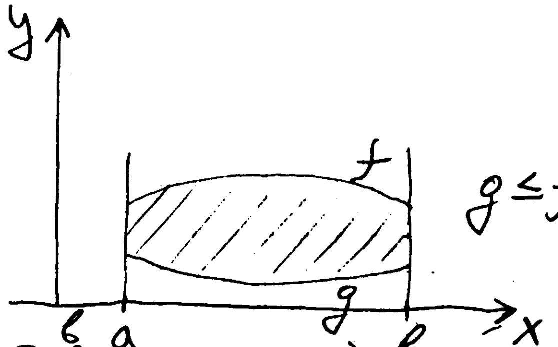
Површина равне фигуре



$f\geq 0 \Rightarrow P(F)=\int_a^b f(x)\,dx$

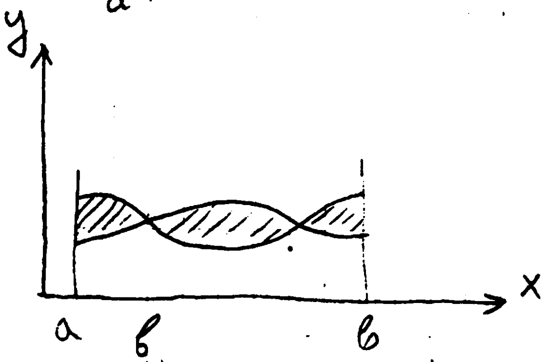


$P=\int_a^b |f(x)|\,dx$



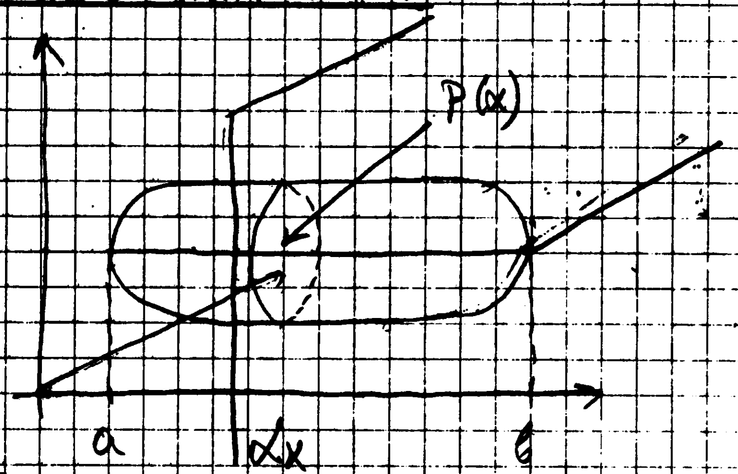
$g\leq f$

$P=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$



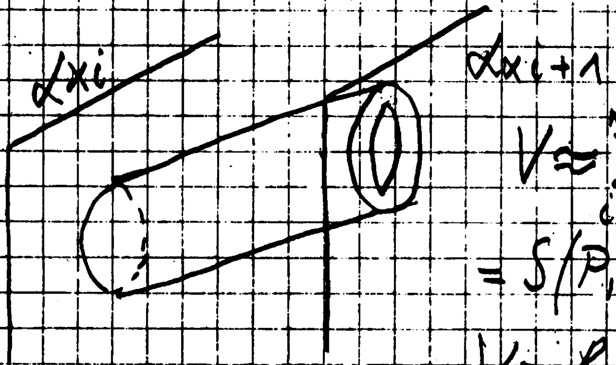
$P=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$

Запремина тела



P - непрекидна на $[a, b]$

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

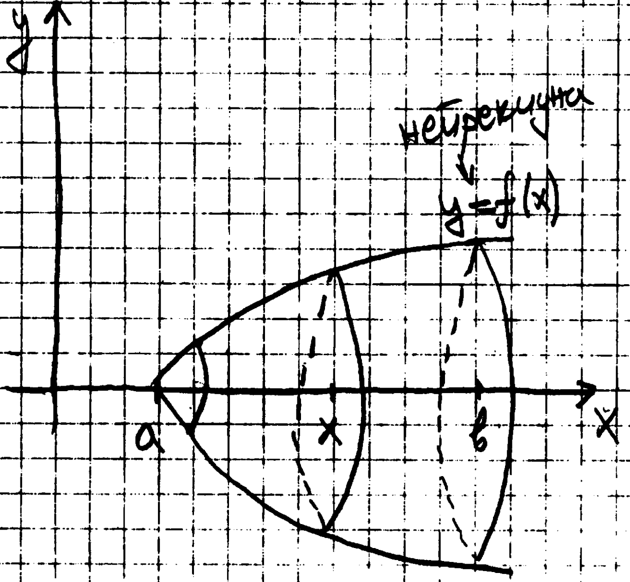


$V_i = B_i \cdot H_i = P(x_i)\,\Delta x_i$

$$V \approx \sum_{i=0}^{n-1} V_i = \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i)\,\Delta x_i = S(P, \{x_i\}, \{x_i\})$$

$$V = \lim_{(\pi)\to 0} S(P, \{x_i\}, \{x_i\})$$

$$V = \int_a^b P(x)\,dx$$

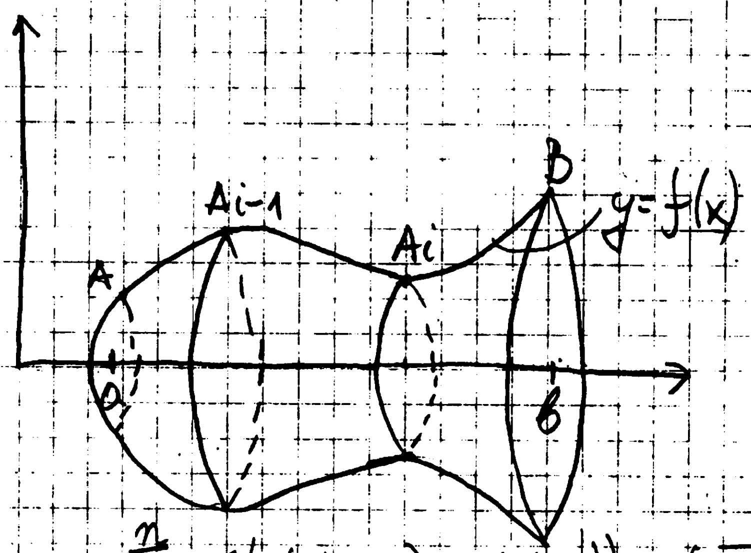


$y = |f(x)|$

$P(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Површина ротационе површи



$$M \approx \sum_{i=1}^{n} \pi\left(f(x_{i-1})+f(x_i)\right) s(\overline{A_{i-1}A_i}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}}_{\approx f(\xi_i)} \sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i \quad (\lambda(\Pi)\to 0)$$

$$\Rightarrow \boxed{M = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}$$

Неодређен интеграл

Деф. Функција F је примитивна функција ф-је f на интервалу I (било какав интервал) ако је $F'(x)=f(x), \forall x\in I$.

Деф. Неодређен интеграл ф-је f на интервалу I је скуп свих примитивних ф-ја ф-је f на интервалу I

$\int f(x)\,dx$ ← ознака $\quad \int \underbrace{f(x)}_{\text{подинтегрална функција}} dx \overset{def}{=} \{F(x)+\underbrace{C}_{\text{константа интеграције}} : C\in R\}, F'(x)=f(x), \forall x\in I$

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

Особине:

Теор. Ако f има примитивну функцију, онда је

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x) \text{ на интервалу } I$$

Доказ: $\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$

Теорем. Ако је f диференцијабилна на I, онда је

$$\int f'(x)\,dx = f(x)+C, \text{ на } I$$

Доказ: $(f(x)+C)' = f'(x)$

Теорем. Нека функције f и g имају примитивне ф-је на интервалу I. Тада је

а) $\int (f(x)\pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

б) $\int a\cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx, \forall a\in R\setminus\{0\}$ на интервалу I

Доказ: а) F примитивна за f на I

G — " — за g на I

$(F\pm G)' = F'\pm G' = f\pm g$; $F\pm G$ је примитивна за $f\pm g$

$\int (f\pm g)\,dx = F\pm G + C = F\pm G \pm (C_1\pm C_2) = (F+C_1)\pm(G+C_2) = \int f\,dx \pm \int g\,dx$

б) F примитивна за f на I $\quad (aF)' = aF' = af \quad aF$ је примитивна за af $\quad \int (af)\,dx = aF + C_1 = a\left(F+\frac{C_1}{a}\right) = a(F+C) = a\int f\,dx$

Одређен интеграл

Деф. Подела интервала $[a,b]$ је било који коначан скуп тачака $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ таквих да је
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

P – скуп свих подела интервала $[a,b]$

$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ дужина $[x_i, x_{i+1}]$

π – било која подела $\pi \in P$

$\pi = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

$\lambda(\pi) = \max \Delta x_i \quad i = 0, 1, \dots, n-1$

Деф. Избор тачака за дату поделу $\pi = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ је било који скуп тачака $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}$ таквих да је $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \quad i = 0, 1, \dots, n-1$

Деф. Број I је одређен интеграл ф-је f на интервалу $[a,b]$ акко

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \pi \in P)(\forall \xi \in \xi_\pi)$$
$$(\lambda(\pi) < \delta \Rightarrow |I - S(f, \pi, \xi)| < \varepsilon)$$

краће:

$$I = \lim_{\lambda(\pi) \to 0} S(f, \pi, \xi)$$

пише се: $I = \int_a^b f(x)\,dx$

a, b – граница интеграције

Деф. Функција f је интеграбилна на интервалу $[a,b]$ акко постоји $\int_a^b f(x)\,dx$

Метод парцијалне интеграције

Теор: Нека су f и g диференцијабилне на интервалу I. Ако једна од функција $f'(x)\cdot g(x)$, $f(x)\cdot g'(x)$ има примитивну функцију на I, онда и друга има примитивну ф-ју на I:

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

Доказ: $\underbrace{(f\cdot g)'}_{f\cdot g\text{ - примитивна}} = f'g + fg'$

$$f\cdot g' = (f\cdot g)' - f'g$$

$$\int fg' = \int((f\cdot g)' - f'g)\,dx = \int (f\cdot g)'dx - \int f'g\,dx = f\cdot g - \int f'g\,dx$$

Метод замене

I, J - интервали који се не своде на тачку

Теор. Нека је $\varphi: J \to R$ диференцијабилна ф-ја на J, $I = \varphi(J)$ и нека је $\int f(x)dx = F(x) + C$ на I.
Тада је $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) = F(\varphi(t)) + C$ на J $(x = \varphi(t))$

Доказ: $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

Теор. (главна теорема) Нека је f ограничена на $[a,b]$ тада су следећа тврђења еквивалентна: (14)

а) f је интеграбилна на $[a,b]$

б) $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall \pi\in\mathcal{P})(\lambda(\pi)<\delta \Rightarrow \overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi)<\varepsilon)$

в) $(\forall \varepsilon>0)(\exists \pi\in\mathcal{P})\,\overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi)<\varepsilon$

г) $\underline{I}=\overline{I}$

Ако је испуњен било који од наведених услова онда је: $\int_a^b f(x)\,dx=\underline{I}=\overline{I}$

Теор (интеграбилне функције) класе

а) Ако је f непрекидна на $[a,b]$, онда је f интеграбилна на $[a,b]$

б) Ако је f ограничена на $[a,b]$ и ако има највише коначно много тачака прекида на $[a,b]$ онда је f интеграбилна на $[a,b]$

в) Ако је f монотона на $[a,b]$ онда је f интеграбилна на $[a,b]$.

Деф. 1. $\int_a^a f(x)\,dx \overset{def}{=} 0$

2. $\int_b^a f(x)\,dx \overset{def}{=} -\int_a^b f(x)\,dx \quad (a<b)$

Непрекидност функције

Нека је $x_0 \in D$ тачка натомилавања скупа D. Функција f је непрекидна у тачки x_0 акко је $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Функција f је непрекидна на скупу $S \subset D$ акко је f непрекидна у свакој тачки скупа S.

Пример условно конвергентног реда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Пример апсолутно конвергентног реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$$

Карактеристичне граничне вредности

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

7) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

8) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

9) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

10) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

Несвојствени интеграл

1) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$

2) $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx =$

$= \lim\limits_{a \to \infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim\limits_{b \to \infty} \int_c^b f(x)\,dx$

Основне особине одређеног интеграла

Теор. Ако су f и g интеграбилне на $[a,b]$, онда је:

а) $\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

б) $\int_a^b k\cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, \forall k\in R$

Теор. Ако је $a<c<b$ и ако је f интеграбилна на $[a,c]$ и на $[c,b]$ онда је f интеграбилна на $[a,b]$ и $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Теор. Ако је f интеграбилна на интервалу који садржи тачке a, b и c онда је $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Теор. Ако је f интеграбилна на $[a,b]$ и ако је $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ онда је f интеграбилна на $[\alpha,\beta]$

Теор. Нека су f и g интеграбилне на $[a,b]$ онда:

а) ако је $f\geq 0$ на $[a,b]$ онда је $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

б) ако је $f(x)\leq g(x)$ на $[a,b]$ онда је $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

в) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

г) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a), M=\sup|f(x)|\ x\in[a,b]$

Теор. О средњој вредности интеграла рачунамо. Ако је f интеграбилна на $[a,b]$ онда постоји $\mu\in[m,M]$ где је $m=\inf f(x)\ x\in[a,b]$, $M=\sup f(x)$, такво да је $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$. Ако је f непрекидна на $[a,b]$ онда $\exists c\in[a,b]$ такво да је $\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$

Њутн-Лајбницова формула

Ако је f непрекидна на $[a,b]$ и ако је F било која примитивна ф-ја за f на $[a,b]$ онда је $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

Доказ: Φ - примитивна функција

$\exists$ const C $\Phi(x) = F(x) + C$, $\forall x \in [a,b]$

$x=a$: $\underbrace{\Phi(a)} = F(a) + C$

$\int_a^b f(t)dt = 0$ (из $\Phi(x) = \int_a^{x=a} f(t)dt$)

$C = -F(a)$

$\Phi(x) = F(x) - F(a)$

$x = b$

$\underbrace{\Phi(b)}_{\int_a^b f(t)dt} = F(b) - F(a)$

$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$

$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$

Диференцијабилност функције

Деф. Нека је $x_0 \in D$ тачка нагомилавања скупа D функција f је диференцијабилна у тачки x_0 акко $\exists$ број A и ф-ја $\mathcal{E}$ такви да је $f(x+h) - f(x) = Ah + \mathcal{E}(h) \cdot h$, за $\forall h$ за које је $x+h \in D$ и $\lim\limits_{h \to 0} \mathcal{E}(h) = 0$

$A \cdot h$ = диференцијал ф-је f у x_0 ознака:

$df(x_0, h) = df(x_0)$

$df(x_0) = A \cdot h$

Дефиниција извода

Нека је $x_0 \in D$ тачка нагомилавања скупа D. Ако $\exists$ (коначан $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ онда тај лимес зовемо извод ф-је $f: D \to R$ у тачки x_0.

ОЗНАКА $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$

$$f'(x_0) \overset{def}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

e^{2x}; $\sin 2x$; $\ln x$; x^n; 2^x; $\cos 2x$

$$(e^{2x})' = \left[\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] = \left[\lim_{h\to 0} \frac{e^{2\cdot(x+h)} - e^{2x}}{h}\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{2x}(e^{2h}-1)}{h}\cdot\frac{2}{2} = \lim_{h\to 0} 2e^{2x}\cdot\underbrace{\frac{e^{2h}-1}{2h}}_{\to 1} = \lim_{h\to 0} 2e^{2x} =$$

$$\boxed{= 2e^{2x}}$$

$$(\sin 2x)' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{\cancel{2x}+2h-\cancel{2x}}{2}\cdot\cos\frac{2x+2h+2x}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\underbrace{2\cdot\sin h}_{\to 1}\cdot\cos\left(\frac{4x+2h}{2}\right)}{h} = 2\cos 2x$$

$$(\ln x)' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} : \frac{x}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{x}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} = \boxed{\frac{1}{x}}$$

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^n} + n\cdot x^{n-1}h + \ldots + \binom{n}{n}h^n - \cancel{x^n}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} n\cdot x^{n-1} + \boxed{\binom{n}{2}x^{n-2}\underset{0}{h}} + \ldots + \binom{n}{n}\underset{0}{h^{n-1}} =$$

$$\cancel{= \lim_{h\to 0} \frac{2^x(2^h-1)}{h}} = \boxed{2^x \ln 2}$$ $\ln 2$

ово је незгодно?

$$(2^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2^{(x+h)} - 2^x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2^x \cdot (2^h - 1)}{h} = 2^x \ln 2$$

$$\ln 2$$

$$(\cos 2x)' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos 2(x+h) - \cos 2x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{2x+2h+2x}{2} \cdot \sin\frac{2x+2h-2x}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} -2\sin(2x+h) \frac{\sin h}{h} = -2\sin 2x$$

$$=1$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) \ \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$\operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x,\ \sqrt{x}$

$$(\operatorname{tg} x)' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin(x+h)\cos x - \cos(x+h)\sin x}{\cos(x+h)\cos x}}{\frac{h}{1}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h-x)}{h[\cos(x+h)\cos x]} = \lim_{h\to 0} \overbrace{\frac{\sin h}{h}}^{1} \cdot \frac{1}{\cos(x+h)\cos x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg})' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\operatorname{ctg}(x+h)-\operatorname{ctg}x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\cos(x+h)}{\sin(x+h)}-\frac{\cos x}{\sin x}}{h} = \frac{\frac{\cos(x+h)\sin x-\sin(x+h)\cos x}{\sin(x+h)\sin x}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin x\cos(x+h)-\cos x\sin(x+h)}{\sin(x+h)\sin x}}{\frac{h}{1}} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x-h-x)}{\sin(x+h)\sin x\cdot h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(-h)}{h\sin(x+h)\sin x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\sqrt{x})' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Несвојствени интеграл

Нека је f непрекидна на $[a,b]$, $\forall b>0$ онда је:
$\int_a^{+\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, акко постоји коначан лимес у том случају кажемо да је $\int^{+\infty} f(x)dx$ конвергентан, а ако лимес не постоји или је ∞, кажемо да овај интеграл дивергира

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx$ - ако оба интеграла постоје на десној страни.

Тејлоров полином (Пеанов и Лагранжев остатак)

$f(x_0+h) \approx f(x_0) - f'(x_0)\cdot h$

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

Деф. Нека је функција f n-пута диференцијабилна у тачки x_0. Тада се полином $T_n(x) = f(x_0) - \frac{f'(x_0)\cdot(x-x_0)}{1!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n}{n!}$ зове се Тејлоров полином n-тог степена функције f у тачки x_0.

$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \to$ ТЕЈЛОРОВА ФОРМУЛА

$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \to$ n-ТИ ОСТАТАК

ПЕАНОВ ОСТАТАК

Теор. Нека $\exists f^{(n-1)}$ у некој ε-околини тачке x_0 и нека $\exists f^{(n)}(x_0)$ и нека је $x_0=0$, тада је

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0) + \underbrace{\delta((x-x_0)^n)}_{\text{ОСТАТАК } x\to x_0}$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \delta((x)^n) \to x\to 0$$

ЛАГРАНЖЕВ ОСТАТАК

Теор. Нека је $f^{(n)}$ непрекидна на $[a,b]$, нека постоји $f^{(n+1)}$ на (a,b) и нека је $x_0 \in [a,b]$ тада за $\forall x \in [a,b]$ $\exists\, c$ између x_0 и x, такво да је:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}}_{\text{ОСТАТАК}}$$

Маклоренова формула

$x_0 = 0$

$$M(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

1° $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$

2° $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + o(x^7)$

3° $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o$

4° $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$

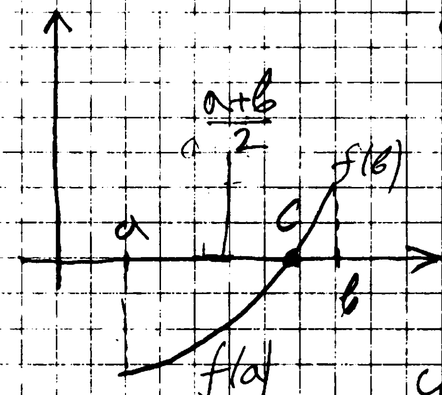
5° $(1+x)^a = \binom{a}{0} + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \binom{a}{3}x^3$

6° $(1+\alpha)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha}{3}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{4} + \frac{\alpha}{5}x^5$

БОЛЦАНО - КОШИЈЕВА ТЕОРЕМА

Теор. Функција f је непрекидна на интервалу $[a,b]$. Ако је $f(a)\cdot f(b)<0$ тада постоји $c\in(a,b)$ такво да је $f'(c)=0$

ДОКАЗ:



$f(a)<0$, $f(b)<0$. На једном од интервала $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ функција сигурно мења знак и тај интервал означавамо са $[a_1,b_1]$ $f(a_1)<0$ и $f(b_1)>0$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=c$,

$c\in(a,b)$. $\left.\begin{array}{l} f(c)=\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n),\ f(c)\le 0 \\ f(c)=\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n),\ f(c)\ge 0 \end{array}\right\} f(c)=0$

Теор. Нека је ф-ја непрекидна на интервалу $[a,b]$ и нека је C између $f(a)$ и $f(b)$ $(f(a)<C<f(b))$ тада постоји $c[a,b]$ такво да је $f(c)=C$.

БОЛЦАНО-ВАЈЕРТАС ТЕОРЕМА

Теор. 1) Ако је f непрекидна ф-ја на затвореном интервалу $[a,b]$ онда је f ограничена на том интервалу.

2) Ако ф-ја непрекидна на $[a,b]$, онда постоје c и d $(c,d\in[a,b])$ такав да је:

$f(c)=\sup\{f(x)/x\in[a,b]\}$ $(=\max f(x),\ x\in[a,b])$

$f(d)=\inf\{f(x)/x\in[a,b]\}$ $(=\min f(x),\ x\in[a,b])$

$\int \operatorname{arctg} dx \Rightarrow \quad u = \operatorname{arctg} x \quad du = \frac{dx}{1+x^2}$

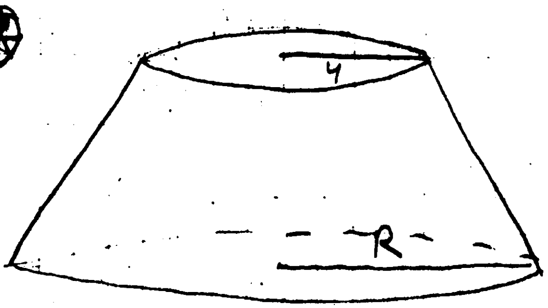
$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du \qquad dv = \int dx \quad v = x$

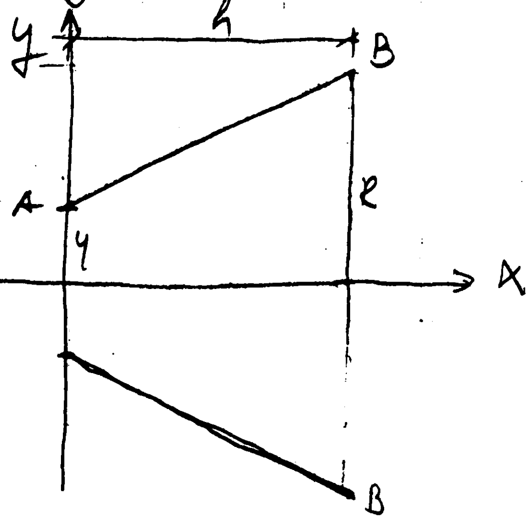
$\int_a^b u\,dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v\,du$

$x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{x^2+1} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} =$

$x^2+1 = t \quad 2x\,dx = dt$

$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln t = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$





$A(0,r)\,;\ B(h,R)$

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$

$y - r = \frac{R-r}{h} \cdot x$

$y = \frac{R-r}{h} \cdot x + r$

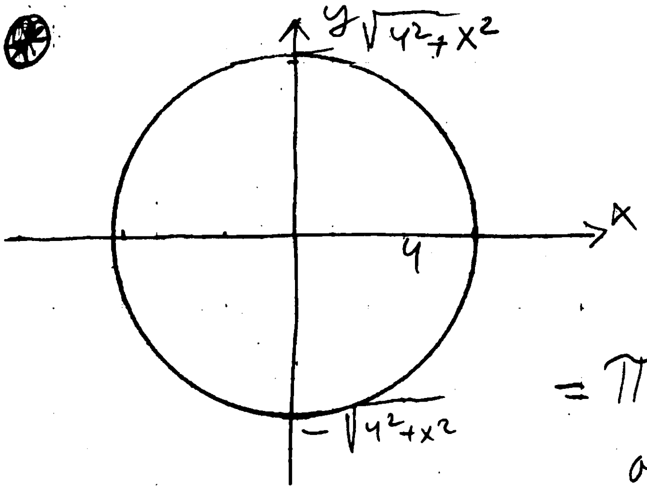
$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx = \pi \int_0^h \left(\frac{R-r}{h} x + r\right)^2 dx =$

$= \pi \int_0^h \left(\frac{R-r}{h}\right)^2 \cdot x^2 + 2r\,\frac{R-r}{h} \cdot x\Big) + r^2\,dx =$

$= \pi\left(\frac{\cancel{h^3}}{3} \cdot \frac{(R-r)^2}{\cancel{h^2}} + 2r \cdot \frac{R-r}{h} \cdot \frac{h^2}{2} + r^2 \cdot h\right) =$

$= \pi \cdot h\left(\frac{R^2 - 2Rr + r^2}{3} + 2rR - 2r^2 + r^2 h\right) =$

$= \frac{\pi h}{3}\left(R^2 - 2Rr + r^2 + 3rR - 3r^2 + 3r^2\right) = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$



$$x^2+y^2=4^2$$

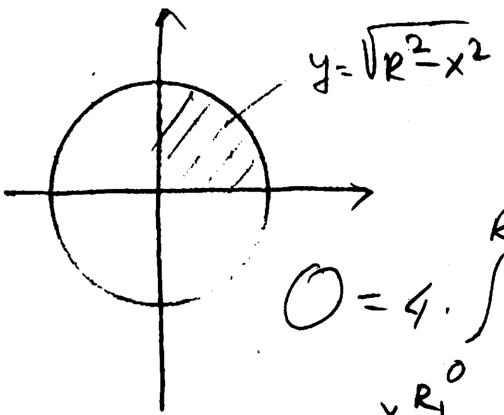
$$y=\pm\sqrt{4^2-x^2}$$

$$V=\pi\int_a^b\left(\sqrt{4^2-x^2}\right)^2dx=$$

$$=\pi\int_a^b 4^2-x^2dx=\pi\int_a^b 4^2dx-\int_a^b x^2dx=$$

$=$

Обим круга



$$x^2+y^2=R^2 \qquad \sqrt{1+y'^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$y=\sqrt{R^2-x^2} \qquad y'^2=\frac{x^2}{R^2-x^2}$$

$$y'=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}} \qquad 1+y'^2=\frac{R^2}{R^2-x^2}$$

$$O=4\cdot\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=4R\int_0^R\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=$$

$$=4R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R=4R\frac{\pi}{2}=\underline{2R\pi}$$

Површина круга

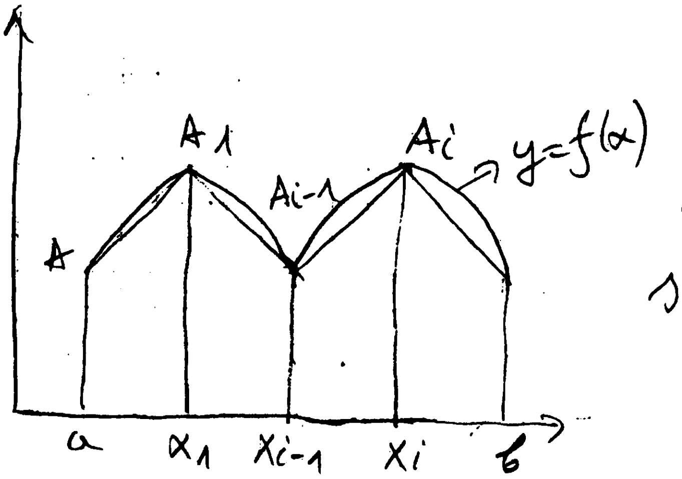
$$P=4\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\cdot dx\left[\begin{matrix}x=R\sin t\\ dx=R\cos t\,dt\end{matrix}\right|\begin{matrix}x=0 & t=0\\ x=R & t=\frac{\pi}{2}\end{matrix}\Bigg|=$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{R^2-R^2\sin^2t}\cdot R\cdot\cos t\,dt=4\int_0^{\pi/2}R\sqrt{1-\sin^2t}\cdot R\cdot\cos t\,dt=$$

$$=4R^2\int_0^{\pi/2}\cos^2t\,dt=4R^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$=4R^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+\frac{1}{4}\left(\cancel{\sin\pi}-\cancel{\sin 0}\right)\right]=4R^2\frac{\pi}{4}=R^2\pi$$

Дужина лука криве



$\widehat{AB}$ – лук криве $y=f(x)$
$\widehat{AB}^m$ – изломљена линија
$s(\widehat{AB}) = s(\widehat{AB}^m)$

$$\widehat{AB}^m = \bigcup_{i=1}^{n} A_{i-1}\text{-}A_i \Rightarrow s(\widehat{AB}^m) = \sum_{i=1}^{n} s(\overline{A_{i-1}\text{-}A_i}) \overset{Л.Т}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)\Delta x_i$$

$s(\widehat{AB}) = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$, ако је непрекидна на $[a,b]$

Тачка нагомилавања

Деф. Број a је тачка нагомилавања скупа $S \subset \mathbb{R}$ акко:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists s \in S, s \neq a)\ |s-a| < \varepsilon$$

Теор. a је тачка нагомилавања скупа S акко: $(\exists x_n, x_n \in S, x_n \neq a)$ такво да је $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

Теор. a је тачка нагомилавања скупа S акко се у $\forall\varepsilon$-околини тачке a налази бесконачно много чланова скупа S.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \stackrel{def}{=} \lim_{n\to\infty} S_n$$

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots a_n$ n-ти парцијална сума реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2+2x+3}\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} \Big|_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{b+1}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{b+1}{\sqrt{2}} - \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} \sqrt{2} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{2}}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+3}$$

Интеграли формуле

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \operatorname{sh} dx = \operatorname{ch} x + c$$

$$\int \operatorname{ch} dx = \operatorname{sh} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a-x}{a+x} \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + c$$

Изводи формуле 30

$$(c)' = 0$$

$$(x)' = 1$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{x^n}' = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccot})' = -\frac{1}{1+x^2}$$