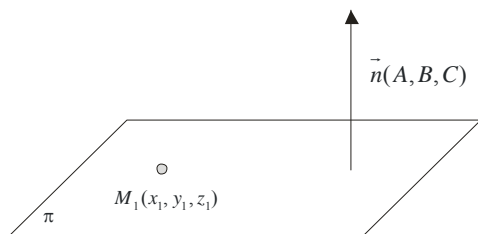
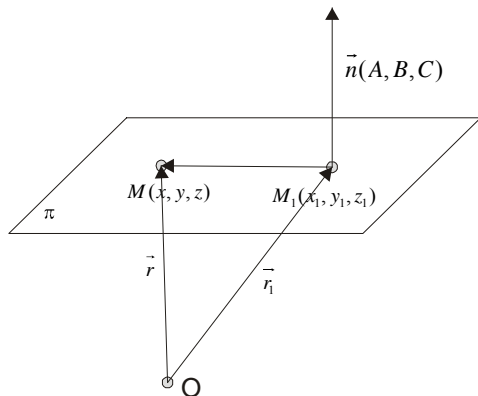


Ravan je osnovni pojam u geometriji i kao takav se ne definiše.

Ravan je određena tačkom i normalnim vektorom.



Da bi izveli jednačinu ravni , proučimo sledeću sliku:



Neka su \vec{r} i \vec{r}_1 vektori položaja tačaka M i M_1 . Odavde je: $\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1$

a kako je vektor $\vec{n}(A, B, C)$ normalan na ravan π , to njihov skalarni proizvod mora biti jednak 0.

$$\boxed{\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0}$$

Ovo je jednačina ravni π u **vektorskom obliku**.

A kako je $\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1 = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ i $\vec{n} = (A, B, C)$ dobijamo :

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = (A, B, C) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0$$

$$\boxed{A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0}$$

A ovo je jednačina ravni u skalarnom obliku.(odnosno **kroz jednu datu tačku**)

Primer 1.

Napisati jednačinu ravni koja sadrži tačku $M(2,1,3)$ i normalna je na vektor $\vec{n} = (1, -1, 2)$

Rešenje:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

$$1(x - 2) - 1(y - 1) + 2(z - 3) = 0$$

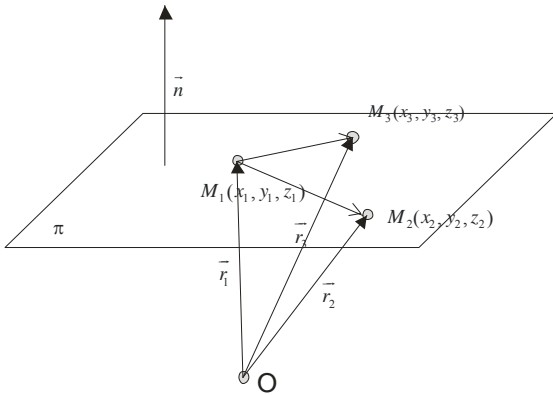
$$x - 2 - y + 1 + 2z - 6 = 0$$

$$x - y + 2z - 7 = 0$$

Oдавде dobijamo i **opštu jednačinu ravni** :

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}, \text{ gde je } A^2 + B^2 + C^2 > 0$$

Ako su nam date tri tačke $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$, onda jednačinu ravni tražimo:



$$(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot [(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)] = 0 \text{ u vektorskom obliku i}$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ u skalarnom obliku.}$$

Primer 2.

Date su tačke A(-1,2,-1) , B(0,-4,3) i C(1,-1,-2). Napisati jednačinu ravni koju one određuju.

Rešenje

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+1 \\ 0+1 & -4-2 & 3+1 \\ 1+1 & -1-2 & -2+1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+1 \\ 1 & -6 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Razvijamo je po prvoj vrsti...

$$(x+1)(6+12) - (y-2)(-1-8) + (z+1)(-3+12) = 0$$

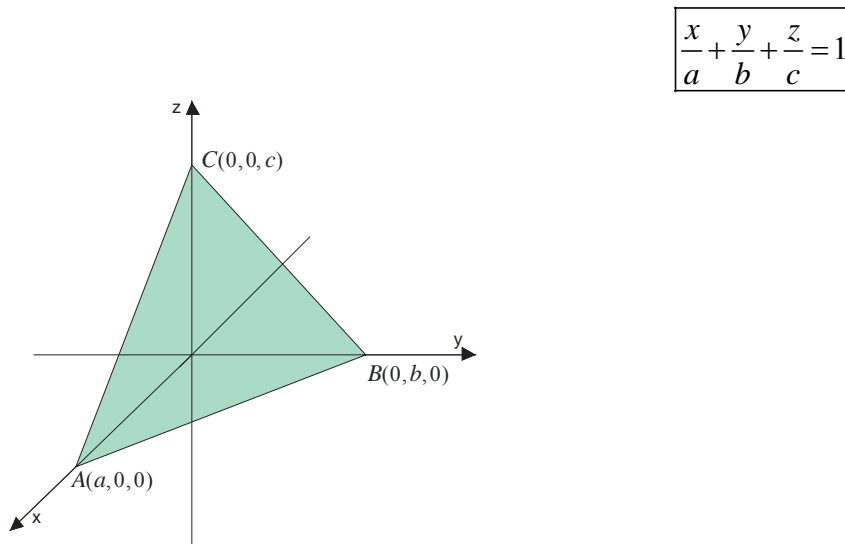
$$18(x+1) + 9(y-2) + 9(z+1) = 0$$

$$18x + 18 + 9y - 18 + 9z + 9 = 0$$

$$18x + 9y + 9z + 9 = 0 \quad \dots\dots\dots/:9$$

$$2x + y + z + 1 = 0$$

U situacijama kad trebamo nacrtati ravan , najbolje je koristiti **segmentni oblik**:



Naravno, a,b i c su odsečki na x, y i z osi.

Primer 3.

Ravan $2x+3y+6z-12=0$ prebaciti u segmentni oblik i skicirati je.

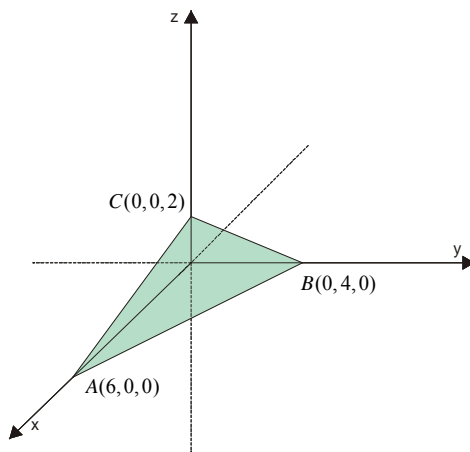
Rešenje:

$2x + 3y + 6z - 12 = 0$ Kako na desnoj strani mora biti 1, radimo sledeće:

$$2x + 3y + 6z = 12 \dots\dots\dots / : 12$$

$$\frac{2x}{12} + \frac{3y}{12} + \frac{6z}{12} = 1$$

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1$$



Primer 4.

- a) Odrediti jednačinu ravni koja sadrži koordinatni početak
- b) Odrediti jednačinu ravni koja je paralelna sa Oz osom
- c) Odrediti jednačinu ravni koja je paralelna sa Oxy ravni

Rešenje

- a) Kako koordinatni početak sadrži tačku $O(0,0,0)$, njene koordinate možemo zameniti u opštu jednačinu ravni:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0 \rightarrow D = 0$$

Dakle, tražena jednačina te ravni je $Ax + By + Cz = 0$

- b) Ako je ravan paralelna sa Oz osom, onda je u vektoru normalnosti te ravni $\vec{n} = (A, B, C)$ sigurno $C=0$, to jest, on je $\vec{n} = (A, B, 0)$ pa je ravan $Ax + By + D = 0$

- c) Ako je ravan paralelna sa Oxy ravni onda je $A=0$ i $B=0$, pa je ravan

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$Cz + D = 0$$

$$Cz = -D$$

$$z = -\frac{D}{C}$$

Naravno, ravan $z = 0$ je ustvari baš Oxy ravan.

Rastojanje tačke $M_0(x_0, y_0, z_0)$ od ravni $Ax+By+Cz+d = 0$ se računa po formuli:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Naravno, apsolutna vrednost nam obezbeđuje da to rastojanje ne bude negativno.

Primer 5.

Odrediti rastojanje tačke $A(1, -1, 3)$ od ravni $2x - 3y + 2z - 4 = 0$

Rešenje

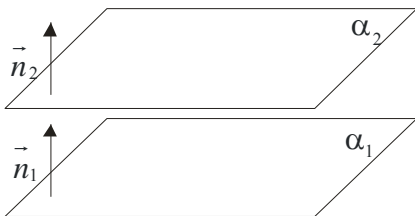
$$\begin{aligned} d &= \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \\ d &= \left| \frac{2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 - 4}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} \right| \\ d &= \left| \frac{2 + 3 + 6 - 4}{\sqrt{4 + 9 + 1}} \right| \\ d &= \left| \frac{7}{\sqrt{14}} \right| = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{14}} \cdot \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = \frac{7\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{2} \end{aligned}$$

Kakav može biti uzajamni položaj dve ravni?

Posmatrajmo dve ravni $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Naravno, njihovi vektori normalnosti su $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ i $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$.

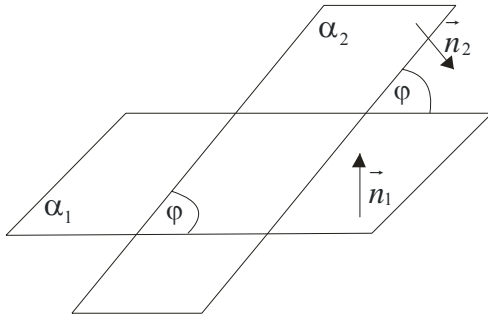
- i) Ravni su **paralelne** samo ako su njihovi vektori normalnosti kolinearni. (Često se u zadacima uzima da one imaju isti vektor onda)



Uslov paralelnosti bi bio $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 0$ ili $\vec{n}_1 = \lambda \cdot \vec{n}_2$ (kolinearni, linearno zavisni) ili

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$$

ii) Ako ravni nisu paralelne , onda se one seku pod nekim uglom .

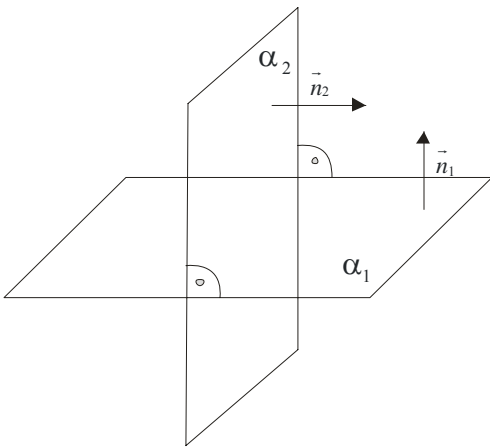


Ugao izmedju dveju ravni je ugao izmedju njihovih normalnih vektora .

Koristeći skalarni proizvod (pogledaj taj fajl) , ugao odredjujemo po formuli:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Specijalni slučaj je kada se ravni seku pod pravim uglom:



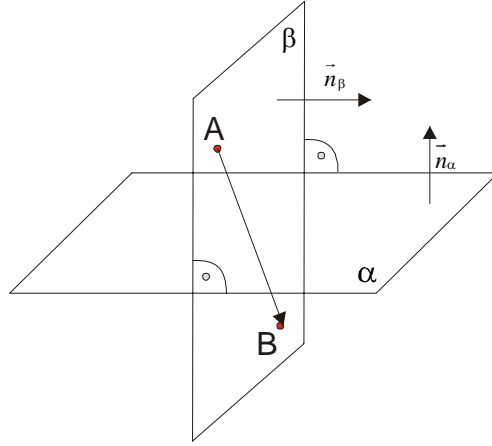
Onda važi da je $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

Primer 6.

Odrediti jednačinu ravni koja prolazi kroz tačke A(2,3,1) i B(-1,2,-2) i normalna je na ravan $\alpha : 2x-3y+z-5=0$

Rešenje

Najpre da postavimo zadatak.



Označimo traženu ravan sa β .

Tačke A i B pripadaju toj ravni i formiraju vektor $\overrightarrow{AB} = (-1-2, 2-3, -2-1) = (-3, -1, -3)$

Ovaj vektor \overrightarrow{AB} je normalan na vektor normalnosti $\overrightarrow{n_\beta}$ ravni β . A kako u zadatku kaže da su ove dve ravni normalne, onda je i $\overrightarrow{n_\beta}$ normalno na $\overrightarrow{n_\alpha}$. Dakle: $\overrightarrow{n_\beta} \perp \overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{n_\beta} \perp \overrightarrow{n_\alpha}$, a ovo nam govori (pogledaj fajl vektori u prostoru) da traženi vektor $\overrightarrow{n_\beta}$ možemo naći pomoću vektorskog proizvoda!

$$\overrightarrow{n_\beta} = \overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{n_\beta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}(9+1) - \vec{j}(-6+3) + \vec{k}(-2-9) = 10\vec{i} + 3\vec{j} - 11\vec{k} = (10, 3, -11)$$

Dalje koristimo jednačinu ravni kroz jednu tačku (sve jedno je dal ćemo uzeti tačku A ili tačku B)

Uzmimo recimo tačku A(2,3,1)

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$$

$$10(x-2) + 3(y-3) - 11(z-1) = 0$$

$$10x - 20 + 3y - 9 - 11z + 11 = 0$$

$$10x + 3y - 11z - 18 = 0$$

I dobili smo traženu ravan.

Skup svih ravni koje sadrže datu pravu p je **pramen ravni**.

Jednačina pramena je data preko dve prave koje pripadaju pramenu i parametra:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

Primer 7.

U pramenu ravni određenom ravnima $3x+y+z-5=0$ i $x-y-z+2=0$ naći ravan koja je normalna na prvu od datih ravni.

Rešenje

Oformimo najpre pramen :

$$3x + y + z - 5 + \lambda(x - y - z + 2) = 0$$

Sredimo ovo da nadujemo vektor normalnosti tog pramena...(sve uz x, pa uz y, pa uz z...)

$$3x + y + z - 5 + \lambda x - \lambda y - \lambda z + \lambda 2 = 0$$

$$(3 + \lambda)x + (1 - \lambda)y + (1 - \lambda)z + 2\lambda - 5 = 0$$

$$\text{Oдавde je } \overrightarrow{n_{PR}} = (3 + \lambda, 1 - \lambda, 1 - \lambda)$$

$$\text{Za prvu ravan } 3x + y + z - 5 = 0 \text{ vektor normalnosti je } \overrightarrow{n_l} = (3, 1, 1)$$

$$\text{Iskoristimo uslov normalnosti: } \overrightarrow{n_l} \cdot \overrightarrow{n_{PR}} = 0$$

$$(3, 1, 1) \cdot (3 + \lambda, 1 - \lambda, 1 - \lambda) = 0$$

$$3(3 + \lambda) + 1(1 - \lambda) + 1(1 - \lambda) = 0$$

$$9 + 3\lambda + 1 - \lambda + 1 - \lambda = 0$$

$$\boxed{\lambda = -11}$$

Vratimo se sada u pramen i zamenimo dobijenu vrednost:

$$3x + y + z - 5 + \lambda(x - y - z + 2) = 0$$

$$3x + y + z - 5 - 11(x - y - z + 2) = 0$$

$$3x + y + z - 5 - 11x + 11y + 11z - 22 = 0$$

$$\boxed{-8x + 12y + 12z - 27 = 0} \text{ je rešenje!}$$

