

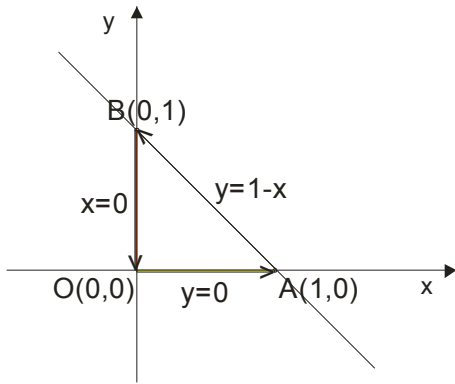
## KRIVOLINIJSKI INTEGRALI – ZADACI ( II DEO)

### Krivolinijski integrali druge vrste

1. Izračunati krivolinijski integral  $\int_c \left( -\frac{y}{x+y} \right) dx + \left( \frac{x}{x+y} \right) dy$  ako je  $c$  kontura trougla koji obrazuje prava  $x + y = 1$  sa koordinatnim osama.

**Rešenje:**

Pogledajmo najpre sliku:



Pošto krivolinijski integral II vrste zavisi od putanje integracije, moramo raditi u smeru suprotnom od smera kazaljke na satu.

I ovde ćemo uočiti tri dela.

**OA** ( Od tačke O( 0,0) do tačke A( 1,0) )

Ovde se radi o pravoj  $y = 0$  ( x osa) pa je tu vrednost integrala očigledno 0

**AB** ( Od tačke A( 1,0) do tačke B( 0,1) )

Možemo ga rešavati po x ili po y. Mi ćemo vam pokazati obe situacije , samo pazite jer formule nisu iste!

**Ako radimo po x.**

Ako je kriva  $c$  zadata u ravni  $y=y(x)$  i  $a \leq x \leq b$  tada je:

$$\int_c P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'_x] dx$$

Ovde je očigledno  $1 \leq x \leq 0$  i još je  $y = 1 - x \rightarrow y' = -1$  , pa imamo:

$$\begin{aligned} \int_{AB} \left( -\frac{y}{x+y} \right) dx + \left( \frac{x}{x+y} \right) dy = \\ \int_{AB} \left( -\frac{1-x}{x+1-x} + \frac{x}{x+1-x} \cdot (-1) \right) dx = \int_1^0 (-1+x-x) dx = -1 \cdot \int_1^0 dx = -1(0-1) = 1 \end{aligned}$$

### Ako radimo po y.

Ako je kriva zadata u ravni  $x=x(y)$  i  $m \leq y \leq n$  tada je :

$$\int_c P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_m^n [P(x(y), y)x'_y + Q(x(y), y)]dy$$

Ovde je očigledno  $0 \leq y \leq 1$  i još je  $x = 1 - y \rightarrow x' = -1$ , pa imamo:

$$\int_{AB} \left( -\frac{y}{x+y} \right) dx + \left( \frac{x}{x+y} \right) dy =$$
$$\int_{AB} \left( -\frac{y}{1-y+y} \cdot (-1) + \frac{1-y}{1+y-y} \right) dy = \int_0^1 (y+1-y) dy = \int_0^1 dy = 1$$

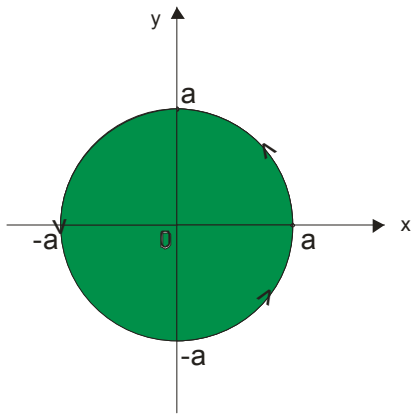
### BO

U pitanju je sada prava  $x = 0$  ( y osa) pa je vrednost integrala i ovde očigledno 0.

Konačno rešenje je dakle 1.

**2. Izračunati krivolinijski integral  $\int_c x^3 dy - y^3 dx$  ako je c kontura kruga  $x^2 + y^2 = a^2$ .**

**Rešenje:**



Uzmemo da je:  $x = a \cos t$  i  $y = a \sin t$ . Ovo očigledno zadovoljava da je  $x^2 + y^2 = a^2$ .

$$x = a \cos t \rightarrow x' = -a \sin t$$
$$y = a \sin t \rightarrow y' = a \cos t \quad \text{i} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \text{ jer obilazimo ceo krug.}$$

Koristimo formulu:

$$\int_c P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy = \int_{t_0}^{t_1} [P(x(t), y(t))x'_t + Q(x(t), y(t))y'_t]dt$$

$$\begin{aligned} \int_c x^3 dy - y^3 dx &= \\ \int_0^{2\pi} \left( (a \cos t)^3 \cdot a \cos t - (a \sin t)^3 \cdot (-a \sin t) \right) dt &= \\ \int_0^{2\pi} (a^4 \cos^4 t + a^4 \sin^4 t) dt = a^4 \cdot \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) dt &= \end{aligned}$$

Ove integrale možemo rešavati na više načina, al mislimo da je najbolje da iskoristimo trigonometrijske formule:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \dots \dots \dots / ()^2$$

$$\sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 1$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{4 \sin^2 x \cos^2 x}{2}$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2}$$

vratimo se u zadatak:

$$\begin{aligned} a^4 \cdot \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) dt &= a^4 \cdot \int_0^{2\pi} \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \sin^2 2x \right) dt = a^4 \cdot \int_0^{2\pi} \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} \right) dt = \\ &= a^4 \cdot \int_0^{2\pi} \left( 1 - \frac{1}{4} + \frac{\boxed{\cos 4x}}{4} \right) dt = a^4 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{3}{4} dt = \frac{3}{4} a^4 \cdot 2\pi = \boxed{\frac{3a^4 \pi}{2}} \end{aligned}$$

ovo je 0 sa datim granicama

3.

**Izračunati krivolinijski integral**  $\int_c x^3 dx + 3zy^2 dy - x^2 y dz$  **gde je c deo prave od tačke ( 3,2,1) do tačke ( 0,0,0)**

**Rešenje:**

Da se podsetimo:

Jednačina prave kroz dve date tačke  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  i  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  je :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Kod nas je to :  $\frac{x-0}{3-0} = \frac{y-0}{2-0} = \frac{z-0}{1-0} \rightarrow \boxed{\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}}$  pa je prebacimo u parametarski oblik:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} = t$$

$$x = 3t \rightarrow x' = 3$$

$$y = 2t \rightarrow y' = 2$$

$$z = 1t \rightarrow z' = 1$$

$$x = 3t \rightarrow \text{za } x=3 \text{ je } t=1 \rightarrow \text{za } x=0 \text{ je } t=0$$

$$\text{i važi da je } y = 2t \rightarrow \text{za } y=2 \text{ je } t=1 \rightarrow \text{za } y=0 \text{ je } t=0 \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \boxed{1 \leq t \leq 0}$$

$$z = t \rightarrow \text{za } z=1 \text{ je } t=1 \rightarrow \text{za } z=0 \text{ je } t=0$$

i) Ako je kriva c zadata parametarskim jednačinama:

$$x=x(t)$$

$$y=y(t) \quad \text{gde je } t_0 \leq t \leq t_1 \quad \text{tada je:}$$

$$z=z(t)$$

$$\int_c P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{t_0}^{t_1} [P(x(t), y(t), z(t))x'_t + Q(x(t), y(t), z(t))y'_t + R(x(t), y(t), z(t))z'_t]dt$$

$$\int_c x^3 dx + 3zy^2 dy - x^2 y dz =$$

$$\int_1^0 [(3t)^3 \cdot x' + 3 \cdot t \cdot (2t)^2 \cdot y' - (3t)^2 \cdot 2t \cdot z'] dt =$$

$$\int_1^0 [(3t)^3 \cdot 3 + 3 \cdot t \cdot (2t)^2 \cdot 2 - (3t)^2 \cdot 2t \cdot 1] dt =$$

$$\int_1^0 [(81t^3 + 24t^3 - 18t^3)] dt = \int_1^0 87t^3 dt = 87 \cdot \frac{t^4}{4} \Big|_1^0 = 87 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \boxed{-\frac{87}{4}}$$

4.

**Izračunati krivolinijski integral**  $\int_c ydx + zdy + xdz$  **gde je c dobijena u preseku**  $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x^2 = Rz \end{cases}$

**Rešenje:**

Iz  $x^2 + y^2 = R^2$  zaključujemo da je :

$$\begin{aligned} x &= R \cos t \\ y &= R \sin t \end{aligned} \quad \text{a kad ovo zamenimo u } x^2 = Rz \rightarrow z = \frac{x^2}{R} = \frac{R^2 \cos^2 t}{R} \rightarrow \boxed{z = R \cos^2 t}$$

Sad imamo:

$$x = R \cos t \rightarrow x' = -R \sin t$$

$$y = R \sin t \rightarrow y' = R \cos t$$

$$z = R \cos^2 t \rightarrow z' = R \cdot 2 \cos t (\cos t)' = R \cdot 2 \cos t (-\sin t) = -2R \cdot \sin t \cos t$$

$$\text{i} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} [P(x(t), y(t), z(t))x'_t + Q(x(t), y(t), z(t))y'_t + R(x(t), y(t), z(t))z'_t] dt = \\
& \int_0^{2\pi} (-R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^3 t - R^2 \cos t \cdot 2 \sin t \cos t) dt = \\
& \int_0^{2\pi} (-R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^3 t - R^2 \cdot 2 \sin t \cos^2 t) dt = \\
& R^2 \cdot \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t + \cos^2 t \cdot \cos t - 2 \sin t \cos^2 t) dt = \\
& R^2 \cdot \left( -\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt + \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t) \cos t dt - 2 \int_0^{2\pi} \sin t \cos^2 t dt \right) =
\end{aligned}$$

Ovo su sve obični integrali, pažljivim rešavanjem dobijamo rešenje:  $\boxed{-R^2 \pi}$

**5. Izračunati krivolinijski integral  $\int_c (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$  gde je kriva c zadata sa  $|x-1| + |y-1| = 1$ .**

**Rešenje:**

**Najpre da analiziramo zadatu krivu i nacrtamo sliku:**

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, x \geq 1 \\ 1-x, x < 1 \end{cases} \quad \text{i} \quad |y-1| = \begin{cases} y-1, y \geq 1 \\ 1-y, y < 1 \end{cases}$$

Sad odredimo koje prave imamo:

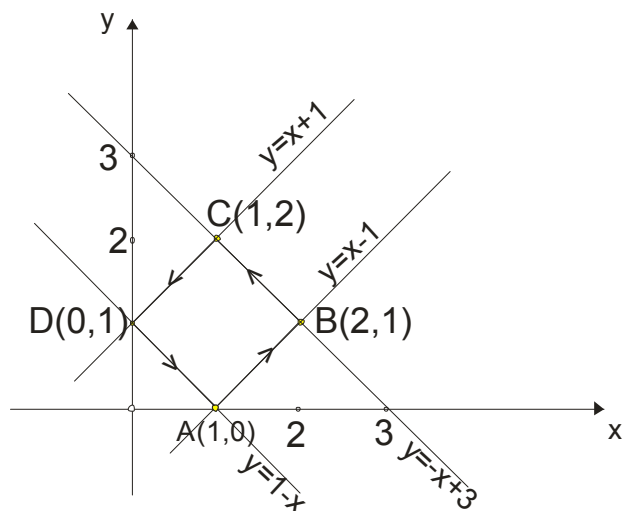
$$x \geq 1 \wedge y \geq 1 \rightarrow x-1+y-1=1 \rightarrow x+y=3$$

$$x \geq 1 \wedge y < 1 \rightarrow x-1-y+1=1 \rightarrow x-y=1$$

$$x < 1 \wedge y \geq 1 \rightarrow -x+1+y-1=1 \rightarrow -x+y=1$$

$$x < 1 \wedge y < 1 \rightarrow -x+1-y+1=1 \rightarrow x+y=1$$

Pogledajmo sliku:



$$\text{Ideja je : } \int_c = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}$$

**AB**

$$\underline{y = x - 1 \rightarrow y' = 1 \wedge 1 \leq x \leq 2}$$

$$\begin{aligned} \int_{AB} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy &= \\ \int_{AB} \left( (x^2 + (x-1)^2) + (x^2 - (x-1)^2) \cdot 1 \right) dx &= \\ \int_1^2 (x^2 + x^2 - 2x + 1 + x^2 - x^2 + 2x - 1) dx &= \int_1^2 (2x^2) dx = 2 \frac{x^3}{3} \bigg|_1^2 = 2 \left( \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right) = 2 \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

**BC**

$$\underline{y = 3 - x \rightarrow y' = -1 \wedge 2 \geq x \geq 1}$$

$$\begin{aligned} \int_{BC} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy &= \\ \int_2^1 \left( (x^2 + (3-x)^2) + (x^2 - (3-x)^2) \cdot (-1) \right) dx &= -\frac{14}{3} \end{aligned}$$

**CD**

$$\underline{y = 1 + x \rightarrow y' = 1 \wedge 1 \geq x \geq 0}$$

$$\begin{aligned} \int_{CD} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy &= \\ \int_{CD} \left( (x^2 + (1+x)^2) + (x^2 - (1+x)^2) \cdot 1 \right) dx &= \\ \int_1^0 (x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 - x^2 - 2x - 1) dx &= \int_1^0 (2x^2) dx = 2 \frac{x^3}{3} \bigg|_1^0 = 2 \left( \frac{0^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right) = -2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

**DA**

$$\underline{y = 1 - x \rightarrow y' = -1 \wedge 0 \leq x \leq 1}$$

$$\begin{aligned} \int_{DA} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy &= \\ \int_0^1 \left( (x^2 + (1-x)^2) + (x^2 - (1-x)^2) \cdot (-1) \right) dx &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

**I sad kad saberemo sve ove integrale dobijamo**

$$\int_c (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy = \frac{14}{3} - \frac{14}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

6. Izračunati krivolinijski integral  $\int_c (4y^2 + 2x^2)dx + (z + x)dy + ydz$  gde je  $c$  zadato sa  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 - z \\ y^2 = z \end{cases}$

**Rešenje:**

Kriva  $c$  je data u prostoru kao presek ove dve površi. Šta raditi u takvoj situaciji?

Eliminišemo promenljivu  $z$  iz datih jednačina ( to jest nadjemo projekciju krive  $c$  na  $xOy$  ravan).

Odatle uvedemo smenu i predjemo u parametarske jednačine. Vratimo se u neku od početnih jednačina i tu dobijemo i treću promenljivu u parametarskom obliku.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 - z \\ y^2 = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x^2 - y^2 + 4 = z \\ y^2 = z \end{cases} \rightarrow -x^2 - y^2 + 4 = y^2 \rightarrow x^2 + 2y^2 = 4 \dots\dots\dots / : 4$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \rightarrow \boxed{x = 2 \cos t} \wedge \boxed{y = \sqrt{2} \sin t} \rightarrow y^2 = z \rightarrow \boxed{z = 2 \sin^2 t}$$

Sada je:

$$x = 2 \cos t \rightarrow x' = -2 \sin t$$

$$y = \sqrt{2} \sin t \rightarrow y' = \sqrt{2} \cos t$$

$$z = 2 \sin^2 t \rightarrow z' = 4 \sin t \cos t$$

Naravno i ovde je  $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} \int_c (4y^2 + 2x^2)dx + (z + x)dy + ydz &= \\ \int_0^{2\pi} \{ [4(\sqrt{2} \sin t)^2 + 2(2 \cos t)^2] \cdot x' + [2 \sin^2 t + 2 \cos t] \cdot y' + \sqrt{2} \sin t \cdot z' \} dt &= \\ \int_0^{2\pi} \{ [8 \sin^2 t + 8 \cos^2 t] \cdot (-2 \sin t) + [2 \sin^2 t + 2 \cos t] \cdot (\sqrt{2} \cos t) + \sqrt{2} \sin t \cdot (4 \sin t \cos t) \} dt &= \\ \int_0^{2\pi} \{ -16 \sin t + 2\sqrt{2} \sin^2 t \cos t + \boxed{2\sqrt{2} \cos^2 t} + 4\sqrt{2} \sin^2 t \cos t \} dt &= \end{aligned}$$

U prethodnim primerima smo već videli da svi integrali sem zaokruženog daju 0 u granicama od 0 do  $2\pi$ .

Neki profesori dozvoljavaju ovu «brzinu» kad prepoznamo takav integral a neki pak traže da se radi postupno, kao i uvek naš savet je da poslušate svog profesora i radite kako on zahteva....

$$= \int_0^{2\pi} \boxed{2\sqrt{2} \cos^2 t} dt = 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \boxed{2\pi\sqrt{2}}$$

**7. Izračunati krivolinijski integral**  $\int_c (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$  **gde je c presečna tačka površi**

$$z = 4 - x^2 - 2y^2 \text{ i ravni } x + 2y + z = 1$$

**Rešenje:**

**Postupak je sličan kao u prethodnom primeru. Najpre projekcija krive na xOy ravan:**

$$\left. \begin{array}{l} z = 4 - x^2 - 2y^2 \\ x + 2y + z = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 4 - x^2 - 2y^2 \\ z = 1 - x - 2y \end{array} \right\}$$

$$4 - x^2 - 2y^2 = 1 - x - 2y$$

$$x^2 + 2y^2 + 1 - x - 2y - 4 = 0$$

$$x^2 - x + 2y^2 - 2y = 3$$

$$\left[ x^2 - x + \frac{1}{4} \right] - \frac{1}{4} + 2 \left( \left[ y^2 - y + \frac{1}{4} \right] - \frac{1}{4} \right) = 3$$

$$\left( x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} + 2 \left( y - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} = 3$$

$$\left[ \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + 2 \left( y - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{15}{4} \right]$$

Ovde uzimamo odgovarajuće smene da jednakost bude zadovoljena ( to jest prelazimo u parametarske jednačine)

$$\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2} \cos t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}} \sin t \end{array} \quad \text{a iz } z = 1 - x - 2y \text{ imamo } z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2} \cos t - \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}} \sin t$$

Odavde je :

$$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2} \cos t \rightarrow x' = -\frac{\sqrt{15}}{2} \sin t$$

$$y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}} \sin t \rightarrow y' = \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}} \cos t \quad \text{i} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2} \cos t - \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}} \sin t \rightarrow z' = \frac{\sqrt{15}}{2} \sin t - \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}} \cos t$$

Dati krivolinijski integral smo sveli na običan odredjeni integral po promenljivoj t.

$$\int_c (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz = \text{zamenimo sve redom i posle sredjivanja dobijemo rešenje } \boxed{-15\pi\sqrt{2}}$$