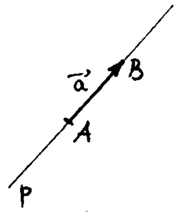
Векторска алгебра

Геометријска дефиниција вектора

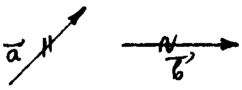


$\vec{AB} = \vec{a}$

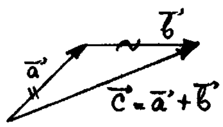
$|\vec{AB}| = |\vec{a}| = a$

ЉУБОМИР/06

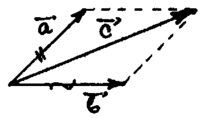
* сабирање вектора



I

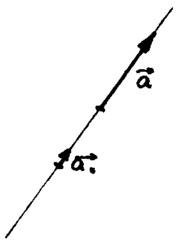


II



$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

* множење вектора скаларом

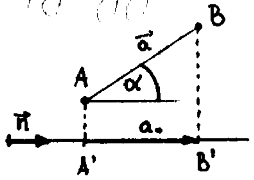


$\vec{b} = \lambda \vec{a}$ $\quad |\vec{b}| = \lambda |\vec{a}|$

$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a_0}$, $|\vec{a_0}| = 1$

$\vec{a_0} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ јединични вектор

* пројекција вектора на скалар

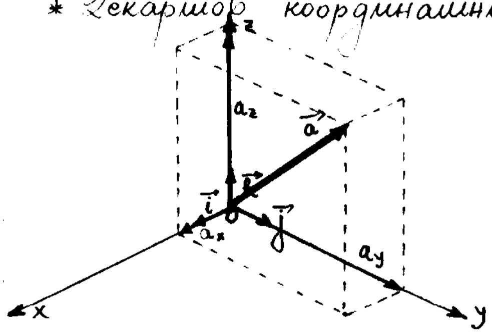


$a_0 = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha$

$\vec{A'B'} = \vec{a} \cdot \vec{m}$

Аналитичко третирање вектора

* Декартов координатни систем



$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= |\vec{a}| \cdot \cos \measuredangle (\vec{i}, \vec{a}) \\ a_y &= |\vec{a}| \cdot \cos \measuredangle (\vec{j}, \vec{a}) \\ a_z &= |\vec{a}| \cdot \cos \measuredangle (\vec{k}, \vec{a}) \end{aligned}\right\}$$ координате вектора у ДКС

$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} = \underbrace{\vec{a_x} + \vec{a_y} + \vec{a_z}}_{\text{компоненте вектора у ДКС}}$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

* једнакост вектора

$\vec{a} = \vec{b} \iff (a_x = b_x) \land (a_y = b_y) \land (a_z = b_z)$

* сабирање вектора

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) + (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = c_x \cdot \vec{i} + c_y \cdot \vec{j} + c_z \cdot \vec{k}$

$c_x = a_x + b_x$
$c_y = a_y + b_y$
$c_z = a_z + b_z$

* множење вектора скаларом

$\vec{b} = \lambda \vec{a} = \lambda (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k})$

$b_x = \lambda a_x, \quad b_y = \lambda a_y, \quad b_z = \lambda a_z$

* скаларни производ два вектора

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \measuredangle (\vec{a}, \vec{b})$

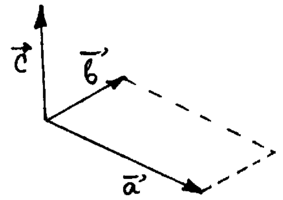
! $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

! $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (услов ортогоналности)

$a_m = \vec{a} \cdot \vec{m_0} \qquad (a_x = \vec{a} \cdot \vec{i} \quad a_y = \vec{a} \cdot \vec{j} \quad a_z = \vec{a} \cdot \vec{k})$

* векторски производ два вектора

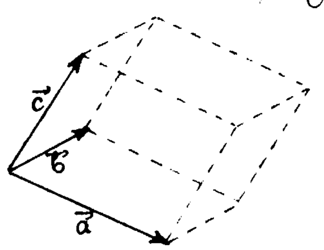
$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \stackrel{\text{int}}{=} \quad |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \measuredangle (\vec{a}, \vec{b})$



! $\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$ (услов колинеарности)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \underbrace{(a_y b_z - a_z b_y)}_{c_x} \cdot \vec{i} + \underbrace{(a_z b_x - a_x b_z)}_{c_y} \cdot \vec{j} + \underbrace{(a_x b_y - a_y b_x)}_{c_z} \cdot \vec{k}$$

* мешовити производ вектора



$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

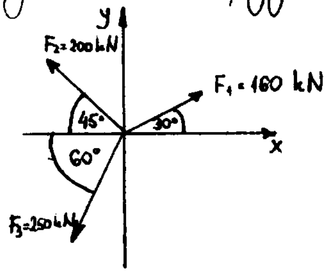
$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ (услов компланарности)

Силе са заједничком нападном тачком

* слагање сила у резултанту

Зад. 1. Наћи резултанту система од три силе са заједничком нападном тачком.

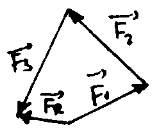


Решење: Резултанта је векторски збир свих сила и делује у заједничкој нападној тачки

$$\vec{F_R} = \sum \vec{F_i}$$

$$\vec{F_R} = \sum_{i=1}^{3} \vec{F_i} \qquad X_R = \sum_{i=1}^{3} X_i \qquad Y_R = \sum_{i=1}^{3} y_i$$

k	F_k	$\alpha_k = \measuredangle(\vec{i}, \vec{F_k})$	$X_k = F_k \cdot \cos\alpha_k$	$Y_k = F_k \cdot \sin\alpha_k$
1	160	30	$160 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 138{,}56$	$160 \cdot \frac{1}{2} = 80$
2	200	135	$200 \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -141{,}42$	$200 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 141{,}42$
3	250	240	$250 \cdot (-\frac{1}{2}) = -125$	$250 \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -216{,}51$



$X_R = -127{,}86 \qquad y_R = 4{,}91$

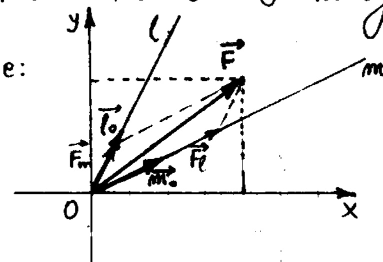
$F_R = \sqrt{(-127{,}86)^2 + (4{,}91)^2} = 127{,}95$ kN

! $\operatorname{tg}\alpha_R' = \frac{y_R}{X_R} = \frac{4{,}91}{-127{,}86} = -0{,}0384 \Rightarrow \alpha_R' = 2{,}2° \Rightarrow \alpha_R = 177{,}8°$

* разлагање сила на компоненте

Зад. 2 Дата је сила F која лежи у равни xOy. Разложити је на компоненте у правцима m и l који са осом x заклапају углове $\alpha_1 = 30°$ и $\alpha_2 = 60°$ и одредити пројекције вектора F на осе m и l. $F = 4\vec{i} + 3\vec{j}$

Решење:



$\vec{F} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$

$\vec{F} = F_l \cdot \vec{l_0} + F_m \cdot \vec{m_0}$

$\vec{l_0} = \{\cos\alpha_1, \sin\alpha_1\} = \{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\}$

$\vec{m_0} = \{\cos\alpha_2, \sin\alpha_2\} = \{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$

$i: \quad \vec{F} \cdot \vec{i} = F_l \cdot \vec{l_0} \cdot \vec{i} + F_m \cdot \vec{m_0} \cdot \vec{i}$

$\quad 4 = F_l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + F_m \cdot \frac{1}{2} \qquad (*)$

$j: \quad \vec{F} \cdot \vec{j} = F_l \cdot \vec{l_0} \cdot \vec{j} + F_m \cdot \vec{m_0} \cdot \vec{j}$

$\quad 3 = F_l \cdot \frac{1}{2} + F_m \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (**)$

добијамо систем једначина

$\frac{\sqrt{3}}{2} F_l + \frac{1}{2} F_m = 4$

$\frac{1}{2} F_l + \frac{\sqrt{3}}{2} F_m = 3$

$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = 0{,}5 \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = 2\sqrt{3} - \frac{1}{2} = 1{,}962 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 4 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{vmatrix} = 0{,}598$

$F_l = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 3{,}928 \qquad F_m = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1{,}196 \Rightarrow \vec{F} = 3{,}928\, \vec{l_0} + 1{,}196\, \vec{m_0}$

Пројекције на l и m

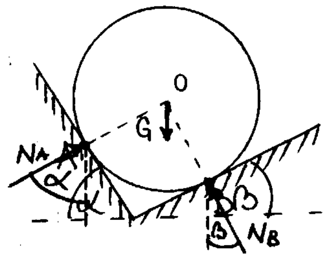
$F_l = \vec{F} \cdot \vec{l_0} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 4{,}964$

$F_m = \vec{F} \cdot \vec{m_0} = 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4{,}598$

Равнотежа сила са заједничком нападном тачком

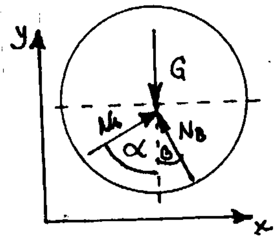
Зад. 1. Кугла тежине G ослања се у двема тачкама A и B на две идеално глатке стрме стране нагнуте под угловима α и β према хоризонтали. Одредити реакције ослонаца у тачкама A и B.

Решење: смер увек претпостављамо за N;
ако на крају буде + погодили смо, а
ако − онда смо погрешили смер



Равнотежа $\vec{F_R}=0 \Rightarrow \sum F_x=0,\ \sum F_y=0$

$\vec{N_A}=\{N_A\sin\alpha,\ N_A\cos\alpha\}$
$\vec{N_B}=\{-N_B\sin\beta,\ N_B\cos\beta\}$
$\vec{G}=\{0,\ -G\}$

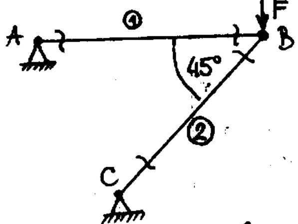


$\sum F_x=0:\ N_A\sin\alpha - N_B\sin\beta=0$
$\sum F_y=0:\ N_A\cos\alpha + N_B\cos\beta - G=0$

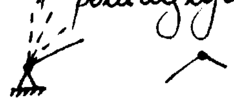
$(1) \Rightarrow N_B = N_A\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

$N_A = G\dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ $\qquad N_B = G\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

Зад. 2. Два штапа AB и BC зглобно су повезани у тачки B у којој делује сила F. Одредити силе у штапу.

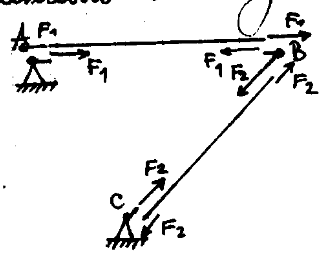


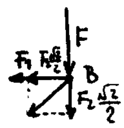
Решење: 2 транслације x, y
1 ротација око z-осе



! (← ⊕ → затезање
→ ⊖ ← притисак)

уклањамо све везе

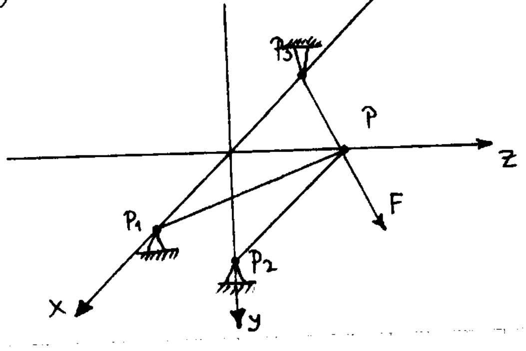




$\sum F_x=0\ :\ -F_1 - F_2\frac{\sqrt{2}}{2}=0$
$\sum F_y=0\ :\ -F - F_2\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

$F_2=-F\sqrt{2}$ $\qquad F_1=F$

Зад. 3. Дата су три проста штапа. Одредити силе у штаповима.



$\vec{F}(0,4,2)$

$P_1(l,0,0)$
$P_2(-l,0,0)$
$P_3(0,l,0)$
$P_4(0,0,l)$

Решење: $\vec{F_i} = F_i \cdot \vec{e_i}$ $\qquad \vec{e_i} = \frac{\vec{PP_i}}{|\vec{PP_i}|}$

$\vec{PP_i} = \vec{OP_i} - \vec{OP}$

$\vec{PP_1} = \vec{OP_1} - \vec{OP} = \{l, 0, 0\} - \{0, 0, l\} = \{l, 0, -l\}$

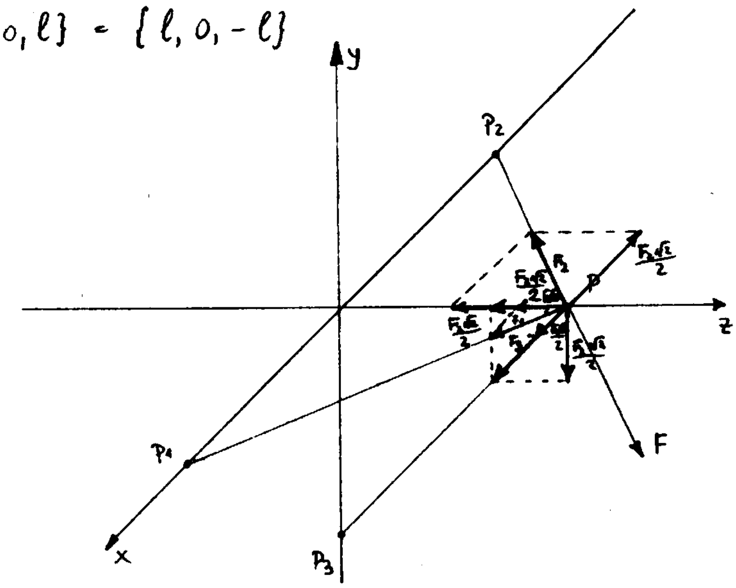
$|\vec{PP_1}| = e\sqrt{2}$

$e_1 = \{\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\}$

$\vec{F} = \{\frac{F_1\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{F_1\sqrt{2}}{2}\}$

$\vec{e_2} \Rightarrow \vec{F_2}$

$\vec{e_3} \Rightarrow \vec{F_3}$



$\sum F_x = 0: \ F_1\frac{\sqrt{2}}{2} - F_2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$\sum F_y = 0: \ -F_3\frac{\sqrt{2}}{2} + 4 = 0$

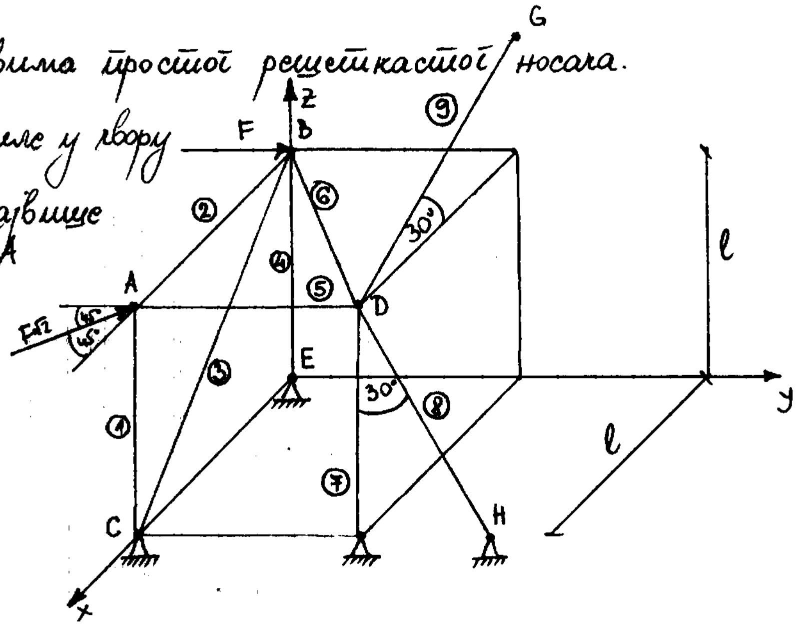
$\sum F_z = 0: \ -F_1\frac{\sqrt{2}}{2} - F_2\frac{\sqrt{2}}{2} - F_3\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 0$

$F_1 = F_2 = 3\sqrt{2} \qquad F_3 = -4\sqrt{2}$

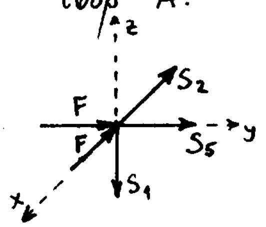
Зад. 4. Одредити силе у штаповима простог решеткастог носача.

Решење: највише три непознате силе у чвору

слободни чворови који имају највише три чвора, крећемо из тачке A



Чвор A:



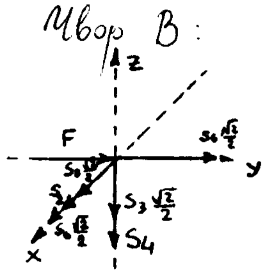
$\sum x = 0: \ -F - S_2 = 0 \Rightarrow S_2 = -F$

$\sum y = 0: \ F + S_5 = 0 \Rightarrow S_5 = -F$

$\sum z = 0: \ S_1 = 0$

сада можемо прећи на следећи

Чвор B:

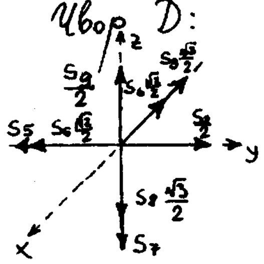


$\sum x = 0: \ S_2 + S_6\frac{\sqrt{2}}{2} + S_3\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow S_3 = 2\sqrt{2}F$

$\sum y = 0: \ F + S_6\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow S_6 = -F\sqrt{2}$

$\sum z = 0: \ -S_4 - S_3\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

Чвор D:

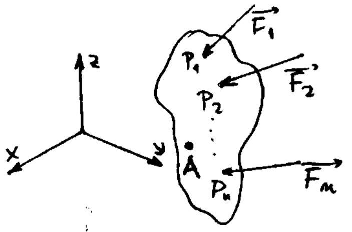


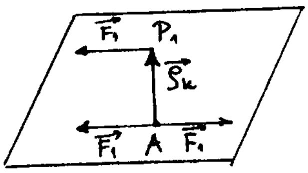
$\sum x = 0: \ -S_9\frac{\sqrt{3}}{2} - S_6\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$\sum y = 0: \ \frac{1}{2} \cdot S_8 - S_6\frac{\sqrt{2}}{2} - S_5 = 0$

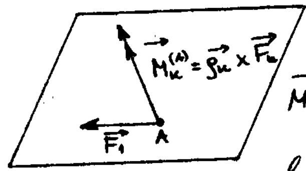
$\sum z = 0: \ \frac{1}{2} \cdot S_9 - S_8\frac{\sqrt{3}}{2} - S_7 = 0$

Произвољан систем сила у простору





$\Rightarrow$



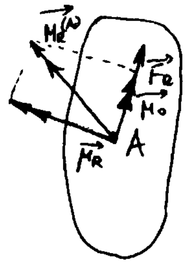
$\vec M_k^{(A)}$ - редукциони моменти

I статичка инваријанта

A - заједничка нападна тачка за n сила и n момената

$\vec F_R = \sum_{k=1}^{n} \vec F_k$ главни вектор сила

$\vec M_R = \sum_{k=1}^{n} \vec M_k$ главни вектор момената



$$\vec M_R^{(A)} = \vec M_0 + \vec \mu_R^{(A)}$$

$$\vec M_0 = \vec M_R^{(A)} \cdot \frac{\vec F_R}{|\vec F_R|}$$

II статичка инваријанта

$\vec M_0$ је увек једнако

* $\vec \mu_R^{(Ai)} = 0$ (динама)

једначина централне осе: $\dfrac{x + \frac{\mu_{Ry}^{(0)}}{Z_R}}{X_R} = \dfrac{y - \frac{\mu_{Rx}^{(0)}}{Z_R}}{Y_R} = \dfrac{z}{Z_R}$

или: $\mu_{Rx} - (yZ_R - zY_R) = 0$
$\mu_{Ry} - (zX_R - xZ_R) = 0$
$\mu_{Rz} - (xY_R - yX_R) = 0$

* $M_0 = 0$ (резултанта)

$\vec M_R \perp \vec F_R \Rightarrow \vec M_R \cdot \vec F_R = 0$

нападна линија резултанте: $\dfrac{x + \frac{M_{Ry}}{Z_R}}{X_R} = \dfrac{y - \frac{M_{Rx}}{Z_R}}{Y_R} = \dfrac{z}{Z_R}$

		ПРОСТОР	РАВАН
$\vec F_R \neq 0$	$\vec M_0 \neq 0$	ДИНАМА	X
	$\vec M_0 = 0$	РЕЗУЛТАНТА	→
$\vec F_R = 0$	$\vec M_R \neq 0$	СПРЕГ СИЛА	→
	$\vec M_R = 0$	РАВНОТЕЖА	→

Зад. 1. Дат је систем сила F_k са нападним тачкама P_k. Испитати на шта се своди систем сила.

$\vec F_1 = \{4,0,3\}$ $\quad P_1(2,-2,3)$
$\vec F_2 = \{-3,2,4\}$ $\quad P_2(1,-1,3)$
$\vec F_3 = \{-2,4,-5\}$ $\quad P_3(4,0,-1)$

Решење: $\vec{F_R} = \{-1, 6, 2\} \neq 0$ $\qquad \vec{M_0} = \vec{M_R} \cdot \frac{\vec{F_R}}{|\vec{F_R}|}$ $\qquad \vec{r_k} = \vec{OP_k}$

$$\vec{M_1} = \vec{r_1} \times \vec{F_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-6, 6, 8)$$

$$\vec{M_2} = \vec{r_2} \times \vec{F_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-10, -13, -1)$$

редуковали смо све три силе на координатни почетак

$$\vec{M_3} = \vec{r_3} \times \vec{F_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & -5 \end{vmatrix} = (4, 22, 16)$$

$$\vec{M_R} = (-12, 15, 23)$$

$$\vec{M_0} = \vec{M_R} \cdot \frac{\vec{F_R}}{|\vec{F_R}|} \Rightarrow \vec{M_R} \cdot \vec{F_R} = (-12)\cdot(-1) + 15\cdot 6 + 23 \cdot 2 = 148 \neq 0 \Rightarrow \text{динама}$$

сада тражимо једначину централне осе

$$\frac{x + \frac{M_{Ry}^{(A)}}{Z_R}}{X_R} = \frac{y - \frac{M_{Rx}^{(A)}}{Z_R}}{Y_R} = \frac{z}{Z_R}$$

$$\vec{M_R} = \vec{M_0} + \vec{\mu_R} \Rightarrow \vec{\mu_R} = \vec{M_R} - \vec{M_0}$$

$$M_0 = \frac{148}{\sqrt{(-1)^2 + 6^2 + 4^2}} = 23,11$$

$$\vec{M_0} = M_0 \cdot \frac{\vec{F_R}}{|\vec{F_R}|} = \frac{23,11}{\sqrt{41}}(-1, 6, 2) = (-3,61;\ 28,66;\ 7,22)$$

$$\vec{\mu_R} = \vec{M_R} - \vec{M_0} = (-8,39;\ -6,66;\ 15,78)$$

$$\frac{x + \frac{-6,66}{2}}{-1} = \frac{y - \frac{-8,39}{2}}{6} = \frac{z}{2} \iff \begin{array}{l} 2x + z - 6,66 = 0 \\ 2y - 6z + 8,39 = 0 \end{array}$$

Зад. 2. Дате су три силе и њихове нападне тачке. Одредити силу F_3 тако да се систем сила своди на резултанту, а затим одредити резултанту и њену нападну линију.

$\vec{F_1} = \{2, 4, -3\}$ $\qquad P_1(3, -1, 2)$
$\vec{F_2} = \{-3, 2, 4\}$ $\qquad P_2(2, -4, -3)$
$\vec{F_3} = \{4, -5, z_3\}$ $\qquad P_3(0, 2, 1)$

Решење: $\vec{F_R} = \{3, 1, z_3 + 1\} \neq 0$

$$M_0 = \vec{M_R} \cdot \frac{\vec{F_R}}{|\vec{F_R}|} = 0$$

$$\vec{M_1}^{(A)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = (-5, 13, 14)$$

$$\vec{M_2}^{(A)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & -3 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-10, 1, -8)$$

$$\vec{M_3}^{(A)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & z_3 \end{vmatrix} = (2z_3 + 5, 4, -8)$$

$$\vec{M_R}^{(A)} = (2z_3 - 10, 18, -2)$$

$$(2z_3 - 10)\cdot 3 + 18 \cdot 1 + (-2)(z_3 + 1) = 0$$

$$4z_3 - 14 \Rightarrow z_3 = 3,5$$

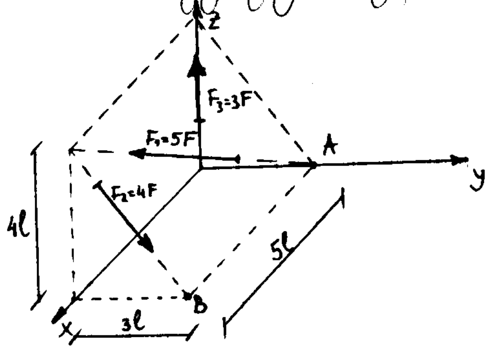
$$\vec{F_R} = \{3, 1, 4.5\} \qquad \vec{M_R} = \{-3, 18, -2\}$$

Једначина нападне линије резултанте

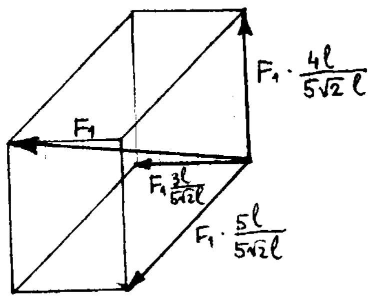
$$\frac{x + \frac{18}{4,5}}{3} = \frac{y - \frac{-3}{4,5}}{1} = \frac{z}{4,5}$$

$$1,5x - z + 6 = 0$$
$$4,5y - z + 3 = 0$$

Зад. 3. а) систем сила редуковати на тачку A
б) наћи другу статичку инваријанту система сила
в) одредити за колико се промени главни редукциони ако се редукција изврши на тачку B.



Решење:



$$D = \sqrt{(5l)^2+(4l)^2+(3l)^2} = 5\sqrt{2}\,l$$

а) $\vec{F_1} = \{ \frac{5}{5\sqrt{2}} \cdot 5F,\ \frac{3}{5\sqrt{2}} \cdot 5F,\ \frac{4}{5\sqrt{2}} \cdot 5F \}$ $\quad A(0, 3l, 0)$

$\vec{F_2} = \{ 0,\ \frac{3}{5} \cdot 4F,\ -\frac{4}{5} \cdot 4F \}$ $\quad B(5l, 3l, 0)$

$\vec{F_3} = \{ 0,\ 0,\ 3F \}$ $\quad O(0,0,0)$

рачунамо главни вектор сила, па главни вектор момента

$\vec{F_R} = \{ 3,53F;\ 0,28F;\ 2,62F \}$

$\vec{M_1}^{(A)} = 0$ нема јер оса пролази кроз A

$$\vec{M_2}^{(A)} = \vec{AB} \times \vec{F_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5l & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{5}F & -\frac{16}{5}F \end{vmatrix} = \{0,\ 16Fl,\ 12Fl\}$$

$$\vec{M_3}^{(A)} = \vec{AO} \times \vec{F_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3l & 0 \\ 0 & 0 & 3F \end{vmatrix} = \{-9Fl,\ 0,\ 0\}$$

$$\vec{M_R}^{(A)} = \{-9Fl,\ 16Fl,\ 12Fl\}$$

б) друга статичка инваријанта система

$$M_o = \vec{M_R}^{(A)} \cdot \frac{\vec{F_R}}{|\vec{F_R}|} = 0,94\ Fl$$

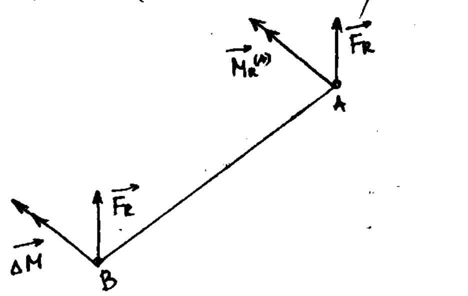
в) $\vec{M_1}^{(B)} = \vec{BA} \times \vec{F_1} = \dots$

$\vec{M_2}^{(B)} = 0$

$\vec{M_3}^{(B)} = \vec{BO} \times \vec{F_3} = \dots$

$\vec{M_R}^{(B)} = \dots$

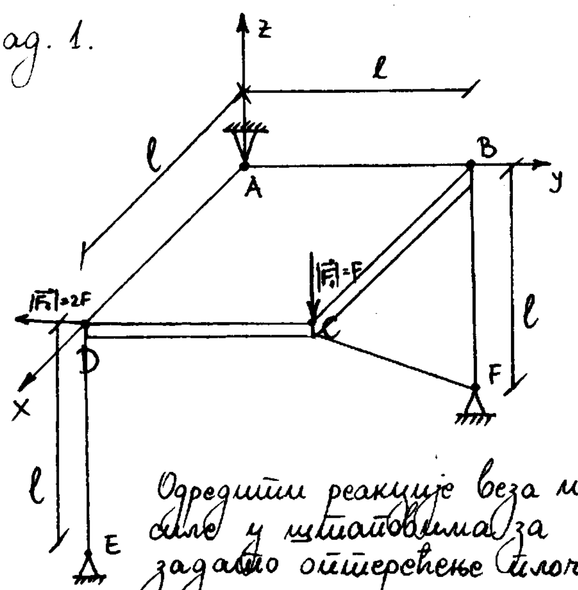
Други начин (и много бржи)



$\{0;\ 13,15\ Fl;\ -1,4\ Fl\}$

Систем сила у простору

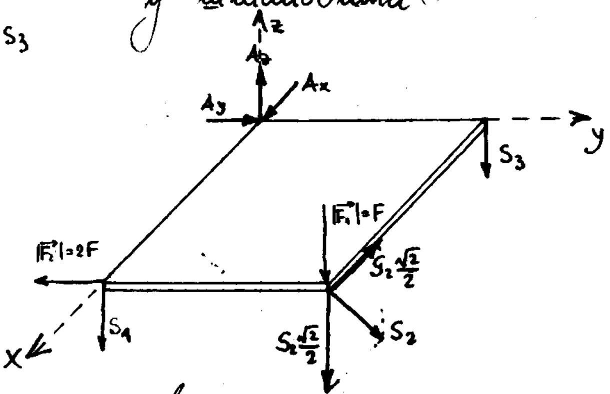
Зад. 1.



Одредити реакције веза и силе у штаповима за задато оптерећење плоче.

Решење: A - непокретан ослонац (дозвољена ротација, али не и транслација)

претпоставићемо затезање у штаповима



смерове претпостављамо; битни су правци
имамо 3 услова равнотеже и 3 услова момената;
треба нам тачно 6 непознатих за 6 једначина

Услови равнотеже

$$\vec{F_R}=0 \qquad\qquad \vec{M_R}^{(0)}=0$$

$$\left.\begin{aligned}\sum F_x&=0\\ \sum F_y&=0\\ \sum F_z&=0\end{aligned}\right\}3 \qquad \left.\begin{aligned}\sum M_x&=0\\ \sum M_y&=0\\ \sum M_z&=0\end{aligned}\right\}3$$

I начин (шаблонски са доста рачунања, непрепоручљив)

$\vec{R_A}\ \{A_x, A_y, A_z\}$

$\vec{r_A} = \vec{OA} = 0$

$\vec{S_1}\ \{0, 0, -S_1\} \qquad \vec{r_D} = \vec{OD} = (l, 0, 0)$

$\vec{S_2}\ \{-S_2\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -S_2\frac{\sqrt{2}}{2}\} \qquad \vec{r_C} = \vec{OC} = (l, l, 0)$

$\vec{S_3}\ \{0, 0, -S_3\} \qquad \vec{r_B} = \vec{OB} = (0, l, 0)$

$\vec{F_1}\ \{0, 0, -F\} \qquad \vec{r_C}$

$\vec{F_2}\ \{0, -2F, 0\} \qquad \vec{r_D}$

$\sum F_x = 0 :\ A_x - S\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$\sum F_y = 0 :\ A_y - 2F = 0$

$\sum F_z = 0 :\ A_z - S_1 - S_2\frac{\sqrt{2}}{2} - S_3 - F = 0$

$\vec{M_{RA}} = \vec{r_A} \times \vec{R_A} = 0$

$\vec{M_1} = \vec{r_D} \times \vec{S_1} = \cdots = \{0, S_1 l, 0\}$

$\vec{M_2} = \vec{r_C} \times \vec{S_2} = \cdots = \{\frac{S_2 l}{\sqrt{2}}, \frac{S_2 l}{\sqrt{2}}, \frac{S_2 l}{\sqrt{2}}\}$

$\vec{M_3} = \vec{r_B} \times \vec{S_3} = \cdots = \{-S_3 l, 0, 0\}$

$\vec{M_{F_1}} = \vec{r_C} \times \vec{F_1} = \cdots = \{-Fl, Fl, 0\}$

$\vec{M_{F_2}} = \vec{r_D} \times \vec{F_2} = \cdots = \{0, 0, -2Fl\}$

саберемо одговарајуће координате свих момената

II начин

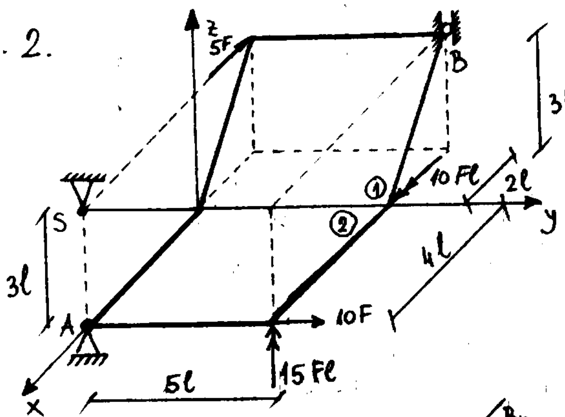
$\Sigma M_x = 0$ Момент не дају оне силе које су паралелне са осом, или је секу. Крак је најкраће растојање између осе и правца силе.

$$\Sigma M_x = 0: \quad -F\cdot l - S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} l - S_3 \cdot l = 0$$
$$\Sigma M_y = 0: \quad S_1 l + Fl + S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} l = 0$$
$$\Sigma M_z = 0: \quad -2Fl + S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} l = 0$$

Добили смо систем: 6 једначина са 6 непознатих

$A_y = 2F$ $A_x = 2F$ $A_z = -3F$ $S_2 = 2\sqrt{2}\,F$ $S_1 = -3F$ $S_2 = -3F$

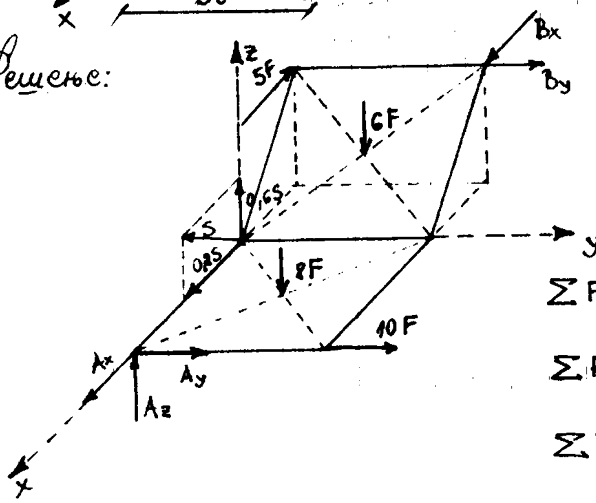
Зад. 2.

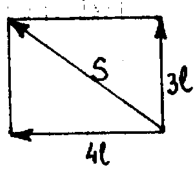


Плоча 1 тежине 6F и плоча 2 тежине 8F међусобно су круто спојене. Оне су ослоњене и оптерећене као на слици

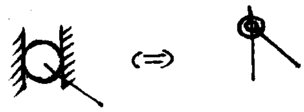
а) Ослободити тело веза
б) Написати услове равнотеже у координатном систему xyz
в) Одредити реакције веза.

Решење:





$\cos\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$
$\sin\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$



$\Sigma F_x = 0$:
$$0{,}8S + A_x - 5F + B_x = 0$$
$\Sigma F_y = 0$:
$$A_y + B_y + 10F = 0$$
$\Sigma F_z = 0$:
$$A_z + 0{,}6S - 6F - 8F = 0$$
$\Sigma M_x = 0$:
$$-8F\cdot\frac{5l}{2} + 10Fl - B_y\cdot 3l - 6F\cdot\frac{5l}{2} = 0$$
$\Sigma M_y = 0$:
$$-A_z\cdot 4l + 8F\cdot 2l + B_x\cdot 3l - 6Fl - 5F\cdot 3l = 0$$
$\Sigma M_z = 0$:
$$A_y\cdot 4l + 15Fl - B_x\cdot 5l - B_y\cdot 2l + 10F\cdot 4l = 0$$

$B_y = -8{,}33\,F$
$A_y = -1{,}67\,F$
$B_x = 13\,F$
$A_z = 8{,}5\,F$
$S = 9{,}17\,F$
$A_x = -15{,}33\,F$

! Овакав задатак на 1. колоквијуму !

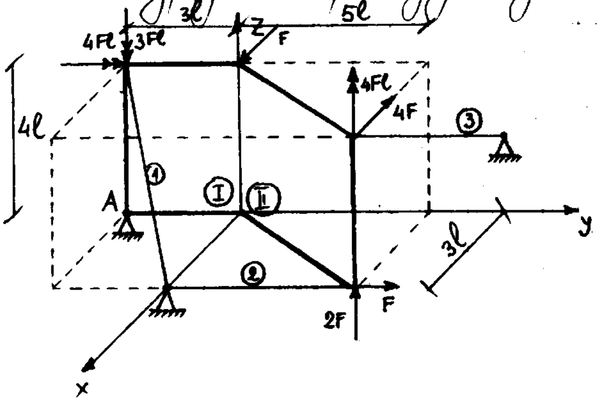
Систем сила у простору

Зад. 1. Две круто спојене плоче тежина $G_1 = 3F$ и $G_2 = 5F$ ослоњене су и оптерећене према слици.

а) ослободити тело веза

б) написати услове равнотеже у координатном систему xyz на слици

в) одредити реакције веза

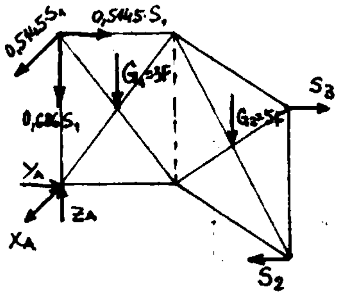


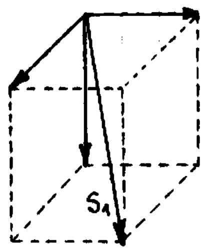
Решење: мора постојати шест веза које спречавају кретање

непокретни ослонац (укида 3 с. с.)

укида 2 степена слободе

укида 1 степен слободе





$$d = \sqrt{(4l)^2 + (3l)^2 + (3l)^2} = 5{,}831\, l$$

$\sum F_x = 0$:

$$X_A + 0{,}5145 S_1 + F - 4F = 0$$

$\sum F_y = 0$:

$$Y_A + 0{,}5145 S_1 - S_2 + S_3 + F = 0$$

$\sum F_z = 0$:

$$Z_A - 0{,}686 S_1 - 3F - 5F + 2F = 0$$

$\sum M_x = 0$:

$$-Z_A \cdot 3l - 0{,}5145 S_1 \cdot 4l + 0{,}686 S_1 \cdot 3l - S_3 \cdot 4l + 3F \frac{3l}{2} - 5F \cdot \frac{5l}{2} + 2F \cdot 5l = 0$$

$\sum M_y = 0$:

$$0{,}5145 S_1 \cdot 4l + 5F \cdot \frac{3l}{2} + F \cdot 4l - 4F \cdot 4l - 2F \cdot 3l + 4Fl = 0$$

$\sum M_z = 0$:

$$X_A \cdot 3l + 0{,}5145 S_1 \cdot 3l - S_2 \cdot 3l + S_3 \cdot 3l + 4F \cdot 5l + F \cdot 3l - 3Fl + 4Fl = 0$$

5° $\Rightarrow$ $S_1 = 3{,}158\, F$

1° $\Rightarrow$ $X_A = 1{,}375\, F$

3° $\Rightarrow$ $Z_A = 8{,}166\, F$

4° $\Rightarrow$ $S_3 = -5{,}625\, F$

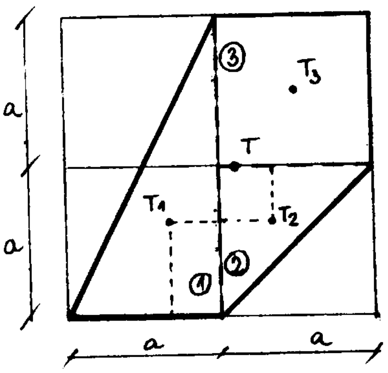
6° $\Rightarrow$ $S_2 = 4{,}375\, F$

2° $\Rightarrow$ $Y_A = 7{,}375\, F$

Тежиште

Овакви типови задатака неће бити на колоквијуму, али могу на испиту

Зад. 1. Одредити тежиште равне фигуре приказане на слици.



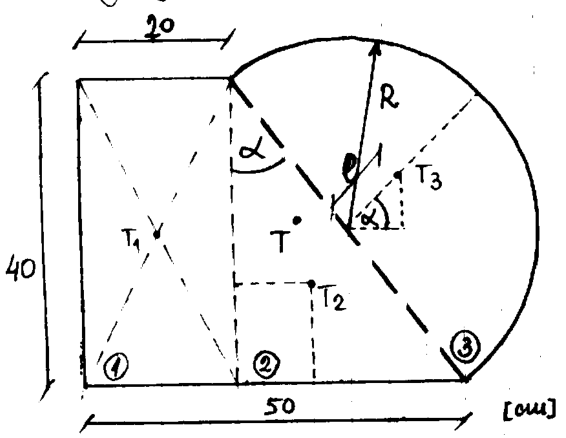
Решење: $X_T = \dfrac{\sum_i X_{Ti} A_i}{\sum A_i}$ $\qquad Y_T = \dfrac{\sum_i Y_{Ti} A_i}{\sum A_i}$

	A_i	X_{Ti}	Y_{Ti}
1	a^2	$\frac{2}{3}a$	$\frac{2}{3}a$
2	$\frac{1}{2}a^2$	$\frac{4}{3}a$	$\frac{2}{3}a$
3	a^2	$\frac{3}{2}a$	$\frac{3}{2}a$

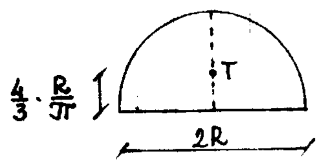
$$X_T = \frac{\frac{2}{3}a\cdot a^2 + \frac{4}{3}a\cdot\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}a\cdot a^2}{\frac{5}{2}a^2} = \frac{17}{15}a$$

$$Y_T = \frac{\frac{2}{3}a\cdot a^2 + \frac{2}{3}a\cdot\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}a\cdot a^2}{\frac{5}{2}a^2} = a$$

Зад. 2. Одредити тежиште површине дате на слици.



Решење:



① $A_1 = 800\ cm^2$; $X_{T_1} = 10\ cm$; $Y_{T_1} = 20\ cm$

② $A_2 = 600\ cm^2$; $X_{T_2} = 20 + \frac{1}{3}\cdot 30 = 30\ cm$; $Y_{T_2} = \frac{1}{3}40 = 13{,}3\ cm$

③ $2R = 50 \Rightarrow R = 25$

$e = \frac{4}{3}\cdot\frac{25}{\pi} = 10{,}610\ cm$

$A_3 = R^2\pi\cdot\frac{1}{2} = 981{,}748\ cm^2$

$X_{T_3} = 20 + \frac{30}{2} + e\cdot\cos\alpha = 20 + \frac{30}{2} + 10{,}61\cdot 0{,}8 = 43{,}488\ cm$

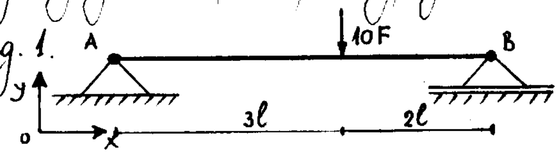
$Y_{T_3} = \frac{40}{2} + e\cdot\sin\alpha = 26{,}366\ cm$

$X_T = 28{,}842\ cm \qquad Y_T = 20{,}944\ cm$

вежба бр. 6 15. 03. 2007.

Одређивање реакција веза код раванских носача

За задате примере одредити реакције веза.

Зад. 1. 

проста греда

Решење: 

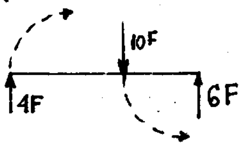
ослободили смо тело веза
круто тело: у равни 3 с.с.
у простору 6 с.с.

$\vec{F}_R=0$: $\sum F_x=0$, $\sum F_y=0$, $\sum F_z=0$ раван $\vec{M}_R=0$: $\sum M_x=0$, $\sum M_y=0$, $\sum M_z=0$

$\sum F_x=0$: $X_A=0$

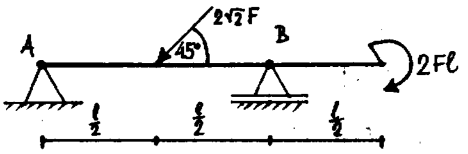
$\sum F_y=0$: $Y_A+Y_B-10F=0 \Rightarrow Y_A=4F$

$\sum M_A^{(+)}=0$: $Y_B\cdot 5\ell-10F\cdot 3\ell=0 \Rightarrow Y_B=6F$

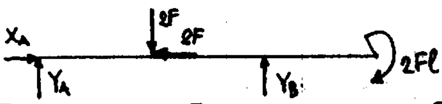


контрола: $\sum M_B^{(+)}=0$: $-4F\cdot 5\ell+10F\cdot 2\ell=0$ ✓

Имамо 3 линеарно независна услова равнотеже
Максимално 3 непознате!

Зад. 2. 

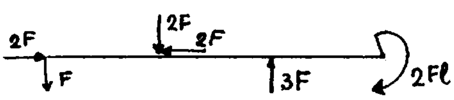
греда са препустом

Решење: 

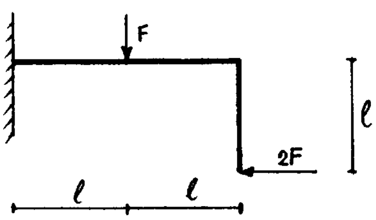
$\sum F_x=0$: $X_A-2F=0 \Rightarrow X_A=2F$

$\sum F_y=0$: $Y_A+Y_B-2F=0 \Rightarrow Y_A=-F$

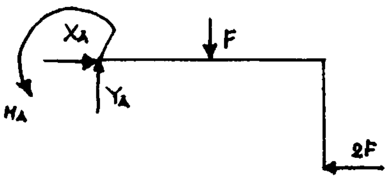
$\sum M_A^{(+)}=0$: $Y_B\cdot\ell-2F\frac{\ell}{2}-2F\ell=0 \Rightarrow Y_B=3F$



контрола: $\sum M_B^{(+)}=0$: $F\ell+F\ell-2F\ell=0$ ✓

Зад. 3. 

конзола (стезаба 3 с.с.)

Решење: 

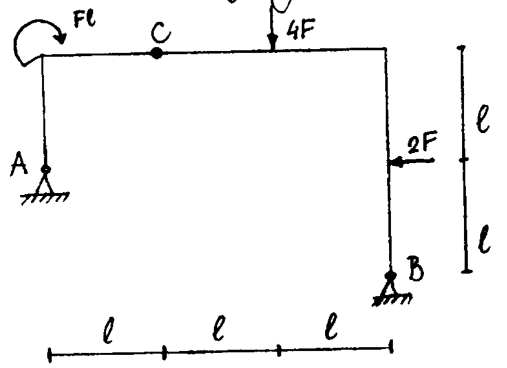
$\sum F_x=0$: $X_A-2F=0 \Rightarrow X_A=2F$

$\sum F_y=0$: $Y_A-F=0 \Rightarrow Y_A=F$

$\sum M_A^{(+)}=0$: $M_A-F\ell-2F\ell=0 \Rightarrow M_A=3F\ell$

непокретан ослонац – укида 2 с.с.
покретан ослонац – укида 1 с.с.
укљештење – укида 3 с.с.

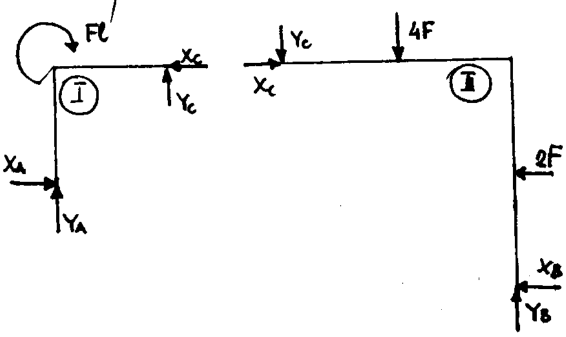
Зад. 4.



лук на 3 зглоба

унутрашња зглобна веза

Решење: теоретски може на 2 начина



број непознатих – 6

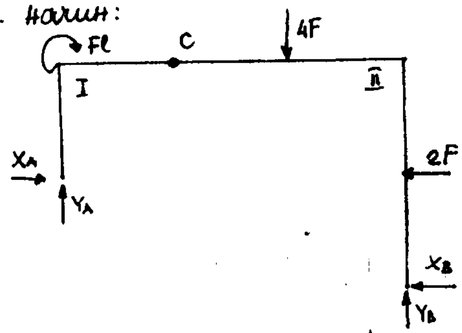
број једначина $\left.\begin{matrix} I-3 \\ II-3 \end{matrix}\right\} 6$

тело I: $\Sigma F_x = 0: \; X_A - X_C = 0$
$\Sigma F_y = 0: \; Y_A + Y_C = 0$
$\Sigma M_A = 0: \; Y_C \cdot l + X_C \cdot l + (-F \cdot l) = 0$
(контрола: $\Sigma M_C = 0$)

тело II: $\Sigma F_x = 0: \; X_C - X_B - 2F = 0$
$\Sigma F_y = 0: \; Y_B - Y_C - 4F = 0$
$\Sigma M_B = 0: \; -X_C \cdot 2l + Y_C \cdot 2l + 4Fl + 2Fl = 0$
(контрола: $\Sigma M_C = 0$)

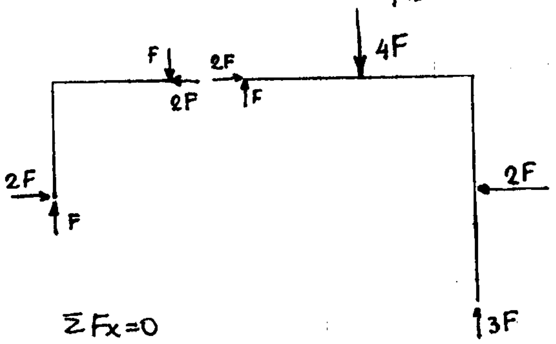
$X_A = 2F \qquad Y_A = F$
$X_B = 0 \qquad Y_B = 3F$
$X_C = 2F \qquad Y_C = -F$

II начин:



цео систем:
$\Sigma F_x = 0: \; X_A - X_B - 2F = 0$
$\Sigma F_y = 0: \; Y_A + Y_B - 4F = 0$
$\Sigma M_A = 0: \; Y_B \cdot 3l - X_B \cdot l - 4F \cdot 2l - Fl = 0$
$\Sigma M_C^{десно} = 0: \; Y_B \cdot 2l - X_B \cdot 2l - 2Fl - 4Fl = 0$

$X_A = 2F \qquad X_B = 0$
$Y_A = F \qquad Y_B = 3F$

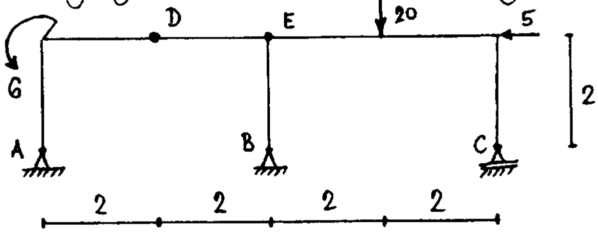


$\Sigma F_x = 0$
$\Sigma F_y = 0$

вежба бр. 7 21.03.2007.

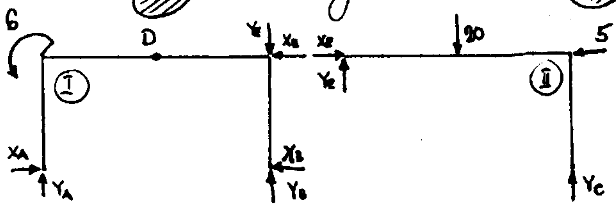
Декомпозиција носача

Зад. 1. Одредити реакције веза за приказани носач.



Решење:

 3 непознате  4 непознате



II: $\Sigma F_x = 0: \ X_E - 5 = 0 \Rightarrow X_E = 5$

$\Sigma M_E = 0: \ Y_C \cdot 4 - 20 \cdot 2 = 0 \Rightarrow Y_C = 10$

$\Sigma F_Y = 0: \ Y_E + Y_C - 20 = 0 \Rightarrow Y_E = 10$

контрола: $\Sigma M_C = 0: \ Y_E \cdot 4 + X_E \cdot 2 - 20 \cdot 2 - 5 \cdot 2 = 0$

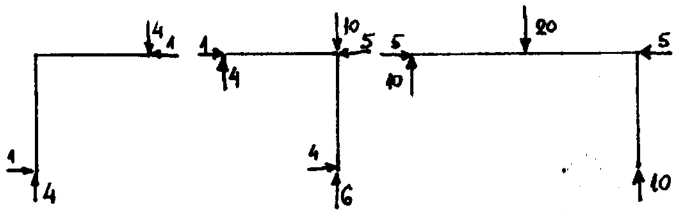
$0 = 0$ ✓

I: $\Sigma M_B = 0: \ Y_A \cdot 4 - X_E \cdot 2 - 6 = 0 \Rightarrow Y_A = 4$

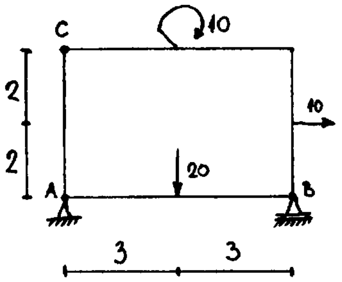
$\Sigma F_y = 0: \ Y_A + Y_B - Y_E = 0 \Rightarrow Y_B = 6$

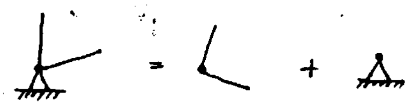
$\Sigma M_D^{лево} = 0: \ X_A \cdot 2 - Y_A \cdot 2 + 6 = 0 \Rightarrow X_A = 1$

$\Sigma F_x = 0: \ X_A - X_B - X_E = 0 \Rightarrow X_B = -4$



Зад. 2.



Решење: 

$Y_A' = Y_C = S_{AC}$

I: $\Sigma M_C^{лево} = 0: \ X_A' \cdot 4 = 0 \Rightarrow X_A' = 0$

$\Sigma F_x = 0: \ -X_B' + 10 = 0 \Rightarrow X_B' = 10$

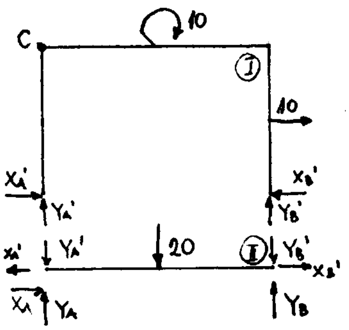
$\Sigma M_B = 0: \ S_{AC} \cdot 6 + 10 + 10 \cdot 2 = 0 \Rightarrow S_{AC} = -5$

$\Sigma F_y = 0: \ Y_B' + S_{AC} = 0 \Rightarrow Y_B' = 5$

II: $\Sigma F_x = 0: \ X_A - X_A' + X_B' = 0 \Rightarrow X_A = -10$

$\Sigma M_A = 0: \ Y_B \cdot 6 - Y_B' \cdot 6 - 20 \cdot 3 = 0 \Rightarrow Y_B = 15$

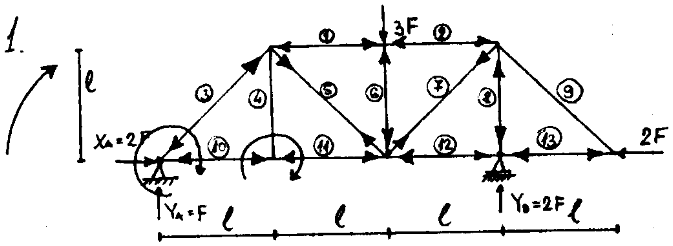
$\Sigma F_y = 0: \ Y_A + Y_B - Y_A' - Y_B' - 20 = 0 \Rightarrow Y_A = 5$



вежба бр. 8 22. 03. 2007.

Решеткасти носач

Зад. 1.



За решеткасти носач на слици одредити:
а) реакције веза
б) силе у свим штаповима методом Кремоне
в) Ритеровим поступком силе у штаповима 2, 7 и 12
г) Кулмановим поступком силе у штаповима 2, 7 и 12

Решење: максимум два штапа (две непознате у чвору) $\Sigma X=0$, $\Sigma Y=0$

* Метода чворова

чвор A: увек претпостављамо затезање

$$\Sigma X=0:\ 2F+S_{10}+S_3\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$
$$\Sigma Y=0:\ F+S_3\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$
$\Rightarrow$ $S_3=-F\sqrt{2}$, $S_{10}=-F$

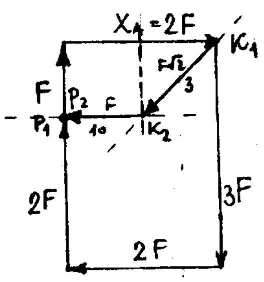
чвор C:

$$\Sigma X=0:\ -S_{10}+S_{11}=0 \Rightarrow S_{11}=-F$$
$$\Sigma Y=0:\ S_4=0$$

⋮

* Метода Кремоне

	+	−
1		2F
2		2F
3		$F\sqrt{2}$
4	0	
5	$F\sqrt{2}$	
6		3F
7	$2F\sqrt{2}$	
8		2F
9	0	
10		F
11		F
12		2F
13		2F



прво покупимо непознате, па познате

из краја паралелна са 1. непознатом
из почетка паралелна са 2. непознатом

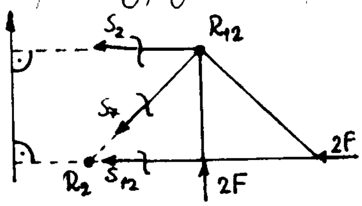
1. од K до пресека
2. од пресека до P

(+) затезање

(−) притисак

* Ритеров поступак

пресек који сече највише 3 непозната штапа!
прво одредимо реакције веза



штос је да у једној једначини одредимо силу

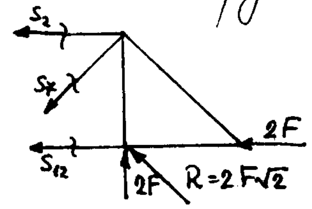
$\sum F_x = 0:\quad 2F - S_7\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow S_7 = 2\sqrt{2}F$

$\sum M_{R_{12}} = 0:\quad S_{12}\cdot l + 2F\cdot l = 0 \Rightarrow S_{12} = -2F$

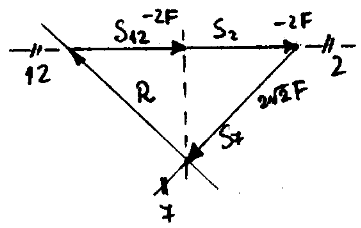
$\sum M_{R_2} = 0:\quad -S_2\cdot l - 2Fl = 0 \Rightarrow S_2 = -2F$

* Кулманов поступак

сличан Ритеру или графички



S_2, S_7, S_{12}, R 4 силе (1 позната, 3 непознате)

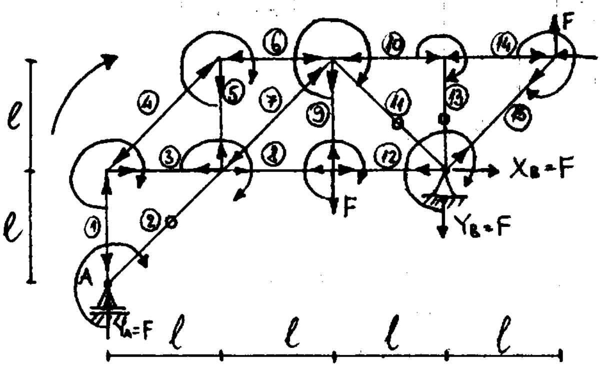


вежба бр. 9

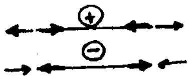
29. 03. 2007.

Решеткасти носач

Зад. 1.



За решеткасти носач на скици одредити силе у свим штаповима
а) методом Кремоне
б) силе у штаповима 6, 7, 8 Ритеровим(Кулмановим) поступком

Решење: 

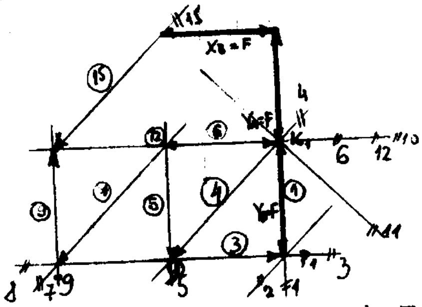
	+	−
1		F
2	0	
3	F	
4		F$\sqrt{2}$
5	F	
6		F
7		F$\sqrt{2}$
8	2F	
9	F	
10		2F
11	0	
12	2F	
13	0	
14		2F
15	F$\sqrt{2}$	

прво одређујемо реакције веза

$$\left.\begin{aligned}\Sigma X&=0\\ \Sigma Y&=0\\ \Sigma M_B&=0\end{aligned}\right\}\; Y_A,\; Y_B,\; X_B$$

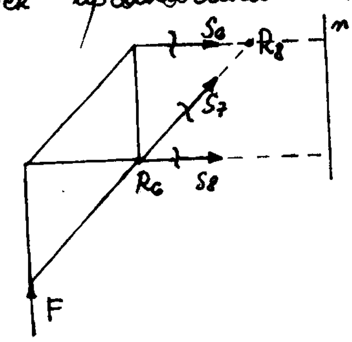
(око B јер откида две непознате)
узимамо стварне смерове сила

* цртамо полигон сила



занима нас почетак и крај познатих сила и пресек сила узимамо редом, познате па непознате

Код Ритера, носач делимо на два дела уз максимално три непознате
Бирамо онај део са мање сила.
Увек претпостављамо затезање.



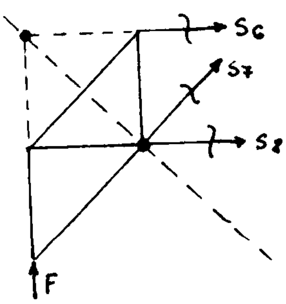
Три једначине са по једном непознатом

$$\Sigma M_{R_6}=0:\quad S_6\cdot l + F\cdot l = 0 \;\Rightarrow\; S_6=-F$$

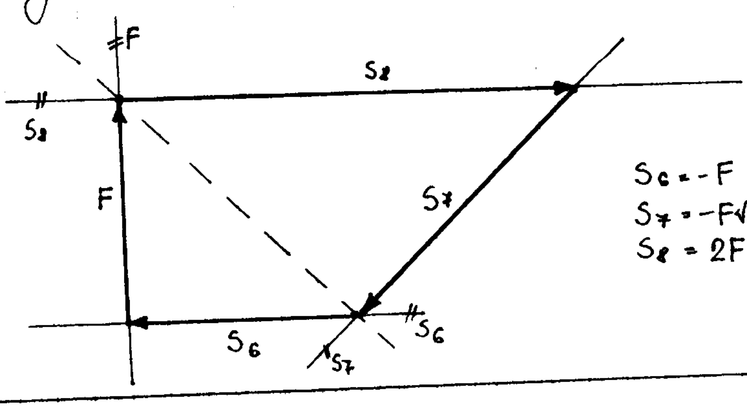
$$\Sigma M_{R_8}=0:\quad 2Fl - S_8\cdot l = 0 \;\Rightarrow\; S_8=2F$$

$$\Sigma F_m=0:\quad S_7\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+F=0 \;\Rightarrow\; S_7=-F\sqrt{2}$$

Код Кулмана све заједно четири силе
Када има више сабирамо са резултантом
Поделимо на два дела и изаберемо лакши

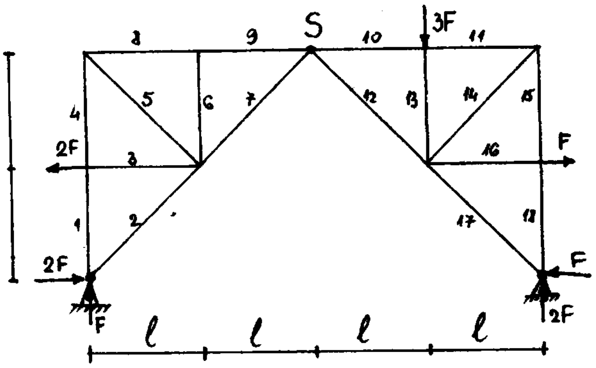


оне које се секу по назначеном правцу, морају се сећи сада ван њега
из горње тачке ∥ са 1,
из доње тачке ∥ са 2.



$S_6=-F$
$S_7=-F\sqrt{2}$
$S_8=2F$

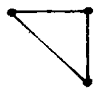
Зад. 2.



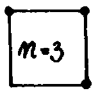
Решење:

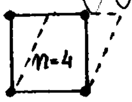
1	F
2	$-2\sqrt{2}F$
3	$2F$
4	F
5	$-F\sqrt{2}$
6	0
7	$-F\sqrt{2}$
8	F
9	F
10	$-F$
11	$-F$
12	$F\sqrt{2}$
13	$-3F$
14	$F\sqrt{2}$
15	$-F$
16	F
17	$-F\sqrt{2}$
18	$-F$

$n=3$: круто тело

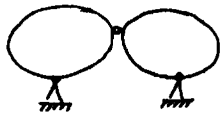


$n=3\cdot 3-3\cdot 2=3$ једно круто тело





није круто тело



2 крута тела
(лук са три зглоба)

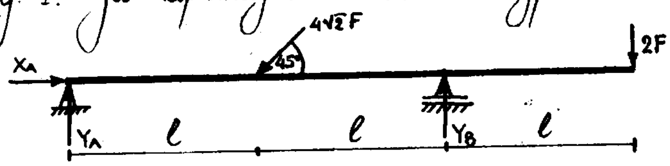
Имамо 4 непознате па нам требају 4 једначине:

$\Sigma X=0$, $\Sigma Y=0$, $\Sigma M_A=0$, $\Sigma M_S^{десно}=0$ (само за једну страну)

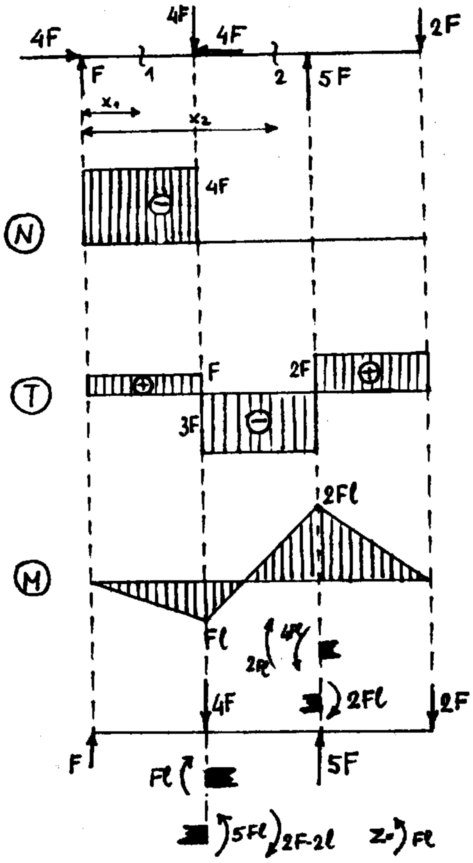
вежба бр. 10 — 26. 04. 2007.

Дијаграми сила

Зад. 1. За приказани носач нацртати дијаграме сила у простору.



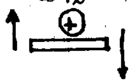
Решење:
$\Sigma F_x = 0: \quad X_A - 4F = 0 \quad \Rightarrow X_A = 4F$
$\Sigma M_A = 0: \quad Y_B \cdot 2\ell - 4F \cdot \ell - 2F \cdot 3\ell = 0 \quad \Rightarrow Y_B = 5F$
$\Sigma F_Y = 0: \quad Y_A + Y_B - 4F - 2F = 0 \quad \Rightarrow Y_A = F$



Ⓝ - дијаграм нормалне силе
$N(x_1) = -4F \qquad N(x_2) = 0$

кад је пресек затегнут (када иде од пресека)

Ⓣ - дијаграм трансверзалних сила (⊥ на правац)
$T(x_1) = +F \qquad T(x_2) = F - 4F = -3F$



смер казаљке на сату

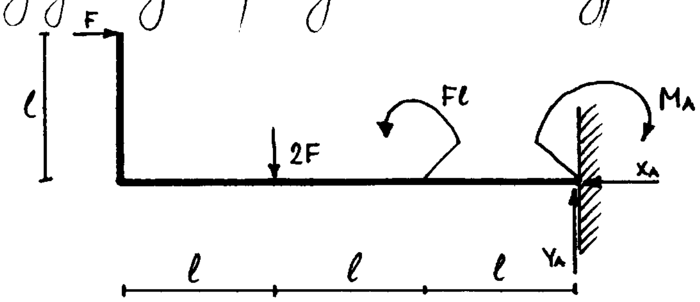
- ако затеже доњу страну иде доле

$M(x_1) = F \cdot x_1 \qquad (0 < x_1 < \ell)$
$M(x_2) = F x_2 - 4F(x_2 - \ell) \qquad (\ell < x_2 < 2\ell)$

$T = \frac{dM}{dx}$ посматрамо са леве стране

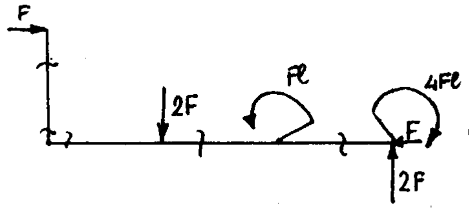
на крајевима нула!
(сем код постојања концентрисаног мом.)

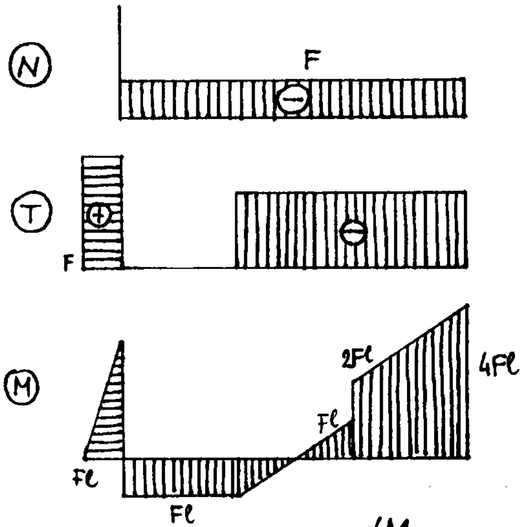
Зад. 2. За приказани носач нацртати дијаграме сила у простору.



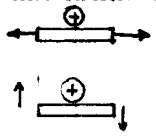
Решење:
$\Sigma F_x = 0: \; -X_A + F = 0 \; \Rightarrow X_A = F$
$\Sigma F_y = 0: \; Y_A - 2F = 0 \; \Rightarrow Y_A = 2F$
$\Sigma M_A = 0: \; M_A - F\ell - 2F \cdot 2\ell + F \cdot \ell = 0 \; \Rightarrow M_A = 4F\ell$

увек прво ослободимо тело веза





гледамо у правцу осе штапа
моменат не утиче на дијаграме (T) и (N)



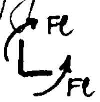
скок: (N) → (T) ↓ (M) ↷ (концентрисани мом.)

једино је код дијаграма момента битно када је испод а када изнад ..

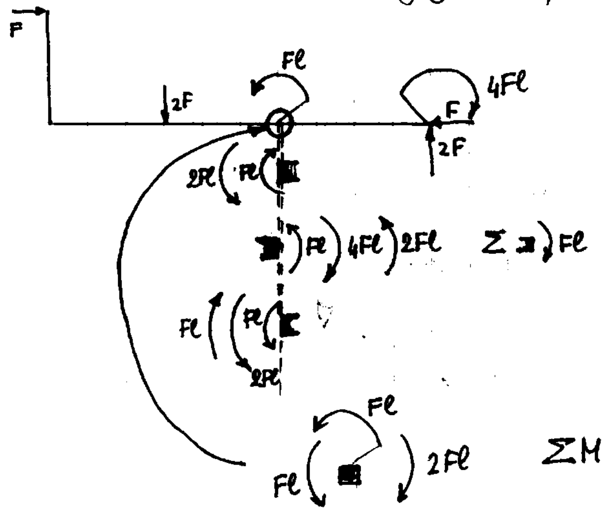
на слободном крају је увек нула, изузев када је на крају концентрисан моменат

$\frac{dM}{dx} = T$ извод од const – нула

Постоје више начина за одређивање дијаграма момента
Један од њих је преко крутог угла.



$\Sigma M = 0$ ако са једне стране стола, онда и са друге стола

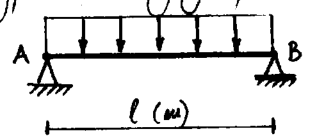


$\Sigma M = 0$

вежба бр. 11 03.05.2007.

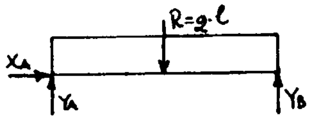
Једнако подељено оптерећење

Зад. 1. Нацртати дијаграме сила у простору.



q - сила по јединици дужине

Решење:

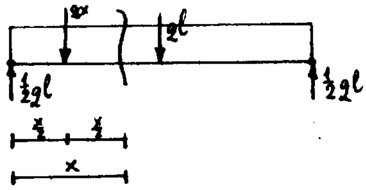


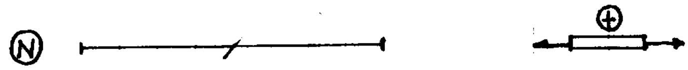
једнако подељено оптерећење (заменимо са једном силом)

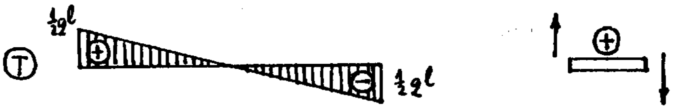
$\sum F_x=0: \quad X_A=0$

$\sum F_Y=0: \quad Y_A+Y_B-R=0 \Rightarrow Y_A=\frac{1}{2}ql$

$\sum M_A=0: \quad Y_B\cdot l-ql\cdot\frac{l}{2}=0 \Rightarrow Y_B=\frac{1}{2}ql$

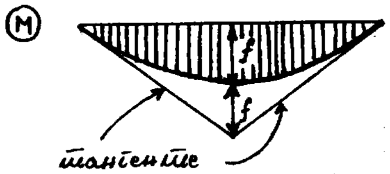






$T(x)=\frac{1}{2}ql-qx=\frac{1}{2}ql\left(1-2\frac{x}{l}\right)$, $0\le x\le l$

дијаграм је линеаран (спојимо почетак и крај)



$M(x)=\frac{1}{2}qlx-qx\cdot\frac{x}{2}=\frac{1}{2}ql\left(x-\frac{x^2}{l}\right)$

квадратна парабола

моменат на слободним крајевима нула (кад нема концентрисаног момента)

$f=\frac{ql^2}{8}$ - жижа $\qquad \frac{dM}{dx}=T$

на месту деловања резултанте наносимо две жиже

код дејства концентрисаног оптерећења: T const M линеаран

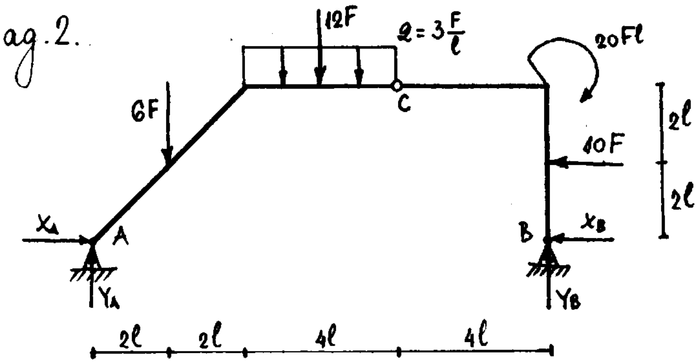
код дејства подељеног оптерећења: T линеаран M квадратна парабола

где је T нула, M има екстремну вредност јер $\frac{dM}{dx}=T$

за конструкцију квадратне параболе нам треба:

- жижа $\left(f=\frac{ql^2}{8}\right)$
- врх момента на почетку, крају.

Зад. 2.



Решење:

$\Sigma M_A = 0:$

$Y_B \cdot 12l + 10F \cdot 2l - 20Fl - 12F \cdot 6l - 6F \cdot 2l = 0 \Rightarrow Y_B = 7F$

$\Sigma Y = 0:$

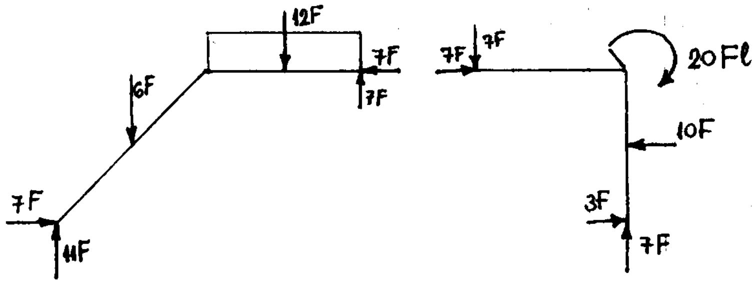
$Y_A + Y_B - 6F - 12F = 0 \Rightarrow Y_A = 11F$

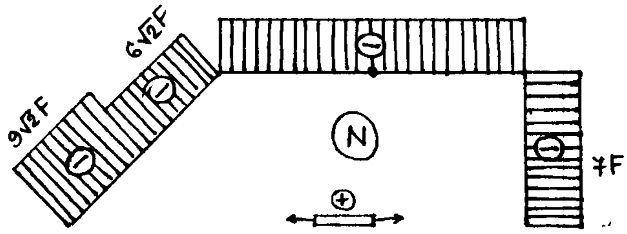
$\Sigma M_C^{десно} = 0:$

$X_B \cdot 4l - Y_B \cdot 4l + 10F \cdot 2l + 20Fl = 0 \Rightarrow X_B = -3F$

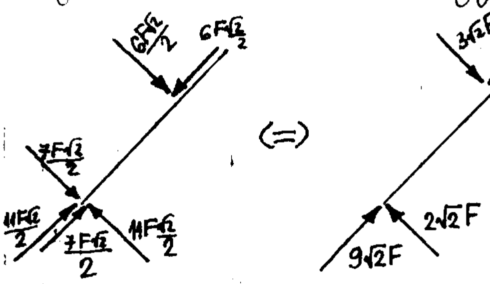
$\Sigma X = 0:$

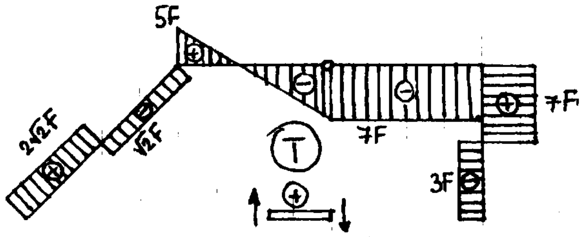
$X_A - X_B - 10F = 0 \Rightarrow X_A = 7F$



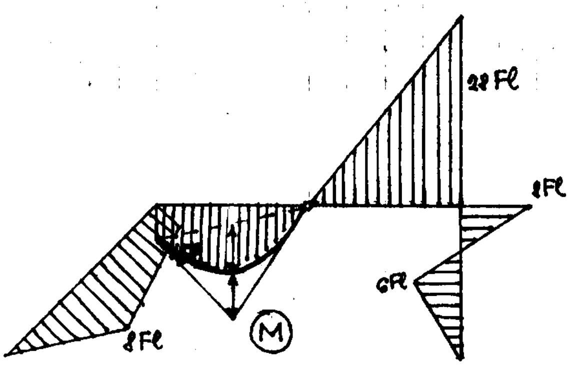


разложићемо силе 6F, 7F, 11F дуж правца





вредности на почетку и на крају спојимо линеарно



код крутог угла

споља → споља, унутра → унутра

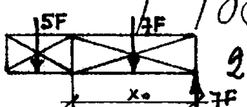
исти интензитет

$\Sigma M = 0$

тражимо максимум

1° може трансформацијом из T

2°



$q = 3\,F/l$

$7F = q \cdot x_0 \Rightarrow x_0 = 2{,}5\,l$

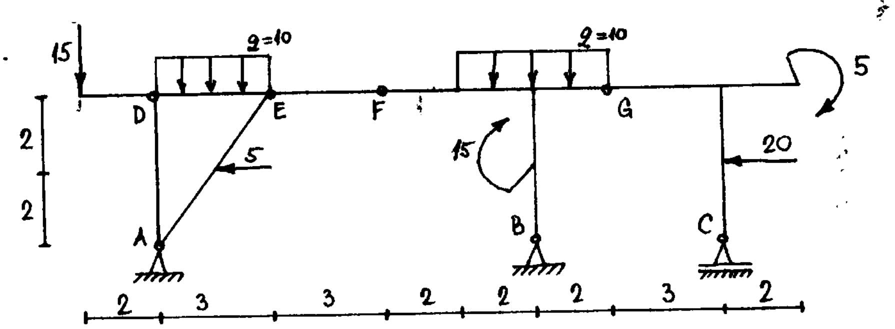
$\mathrm{ext}\,M = 7Fx_0 - \underbrace{q x_0}_{7F} \cdot \frac{x_0}{2} = 8{,}16\ Fl$

! На трећем колоквијуму биће два задатка из ове области (не тежих од данашњих примера) !

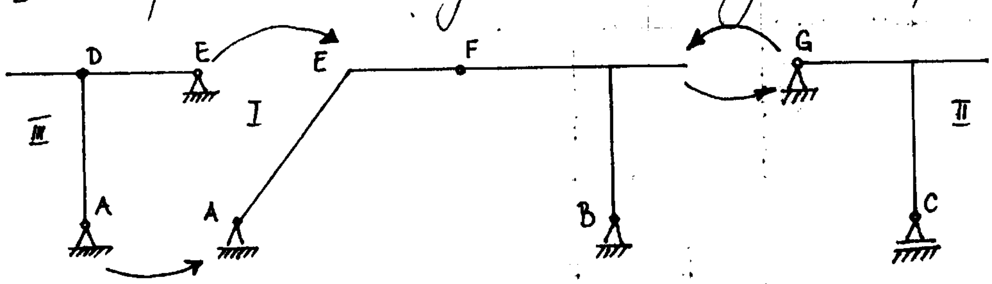
вежба бр. 12 07.05.2007.

Вежбање

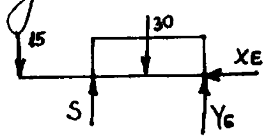
Зад. 1.



Решење: раставићемо овај систем на 5 делова (прво на три)



• део A-D-E

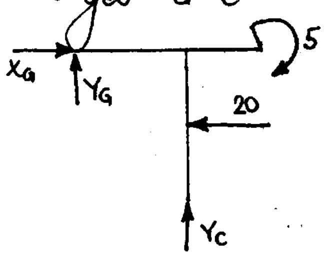


$\sum M_E = 0 \Rightarrow S = 40$

$\sum X = 0 \Rightarrow X_E = 0$

$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_E = 5$

• део G-C

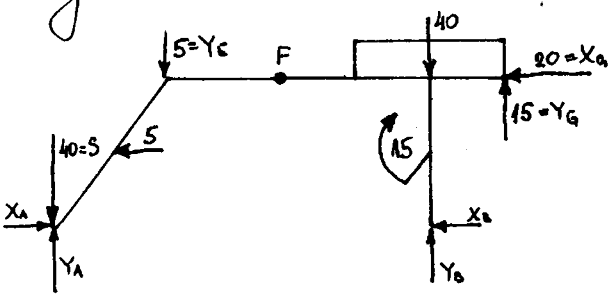


$\sum X = 0 \Rightarrow X_G = 20$

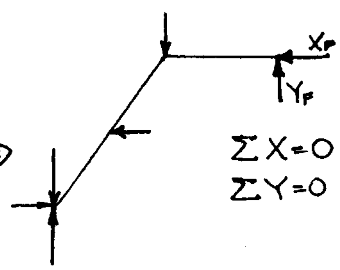
$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_G = -15$

$\sum M_G = 0 \Rightarrow Y_C = 15$

• део A-F-B



$\Rightarrow$



$\sum X = 0 \Rightarrow X_F = 14{,}75$

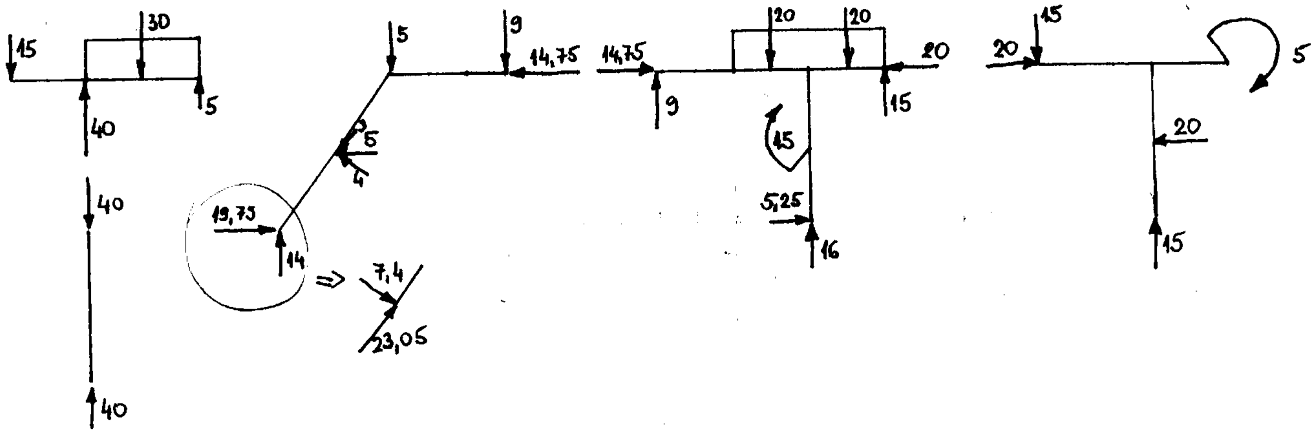
$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_F = -9$

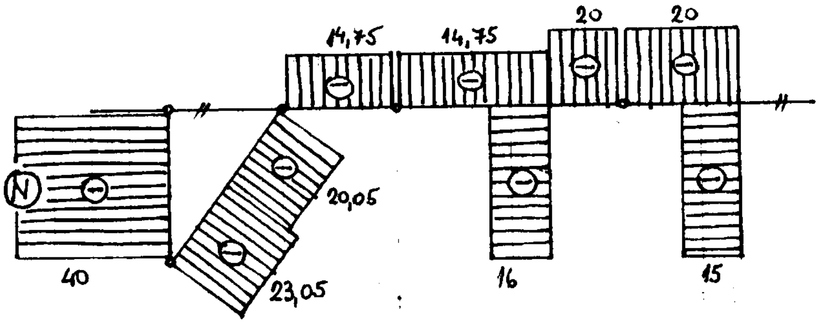
$\sum M_A = 0 : Y_B \cdot 10 + 15 \cdot 12 - 40 \cdot 10 - 15 - 5 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 20 \cdot 4 = 0 \Rightarrow Y_B = 16$

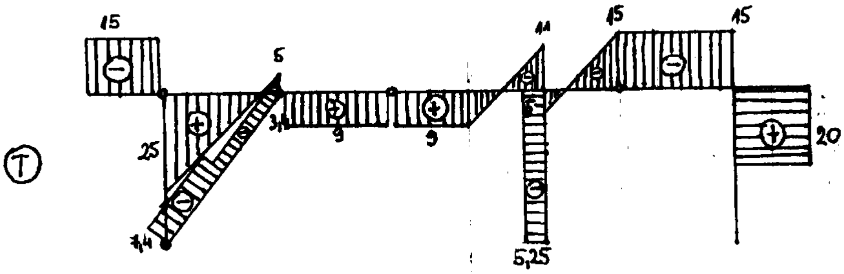
$\sum Y = 0 : Y_A + Y_B - 40 - 5 - 40 + 15 = 0 \Rightarrow Y_A = 54$

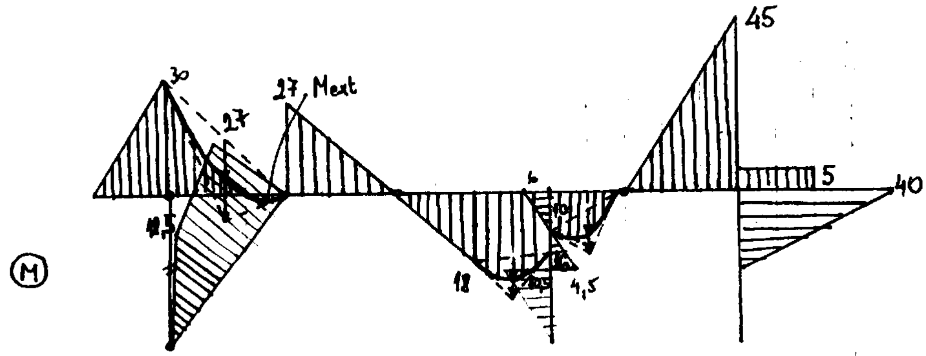
$\sum M_F^{\text{лево}} = 0 : X_A \cdot 4 - Y_A \cdot 6 + 40 \cdot 6 - 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 0 \Rightarrow X_A = 19{,}75$

$\sum X = 0 : -X_B + X_A - 5 - 20 = 0 \Rightarrow X_B = -5{,}25$







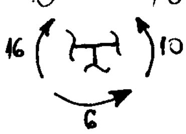


$f_1 = \frac{q l^2}{8} = \frac{10 \cdot 3^2}{8} = 11{,}25$

$f_2 = \frac{q l^2}{8} = \frac{10 \cdot 2^2}{8} = 5$

$f_3 = 5$

провера за крути угао.

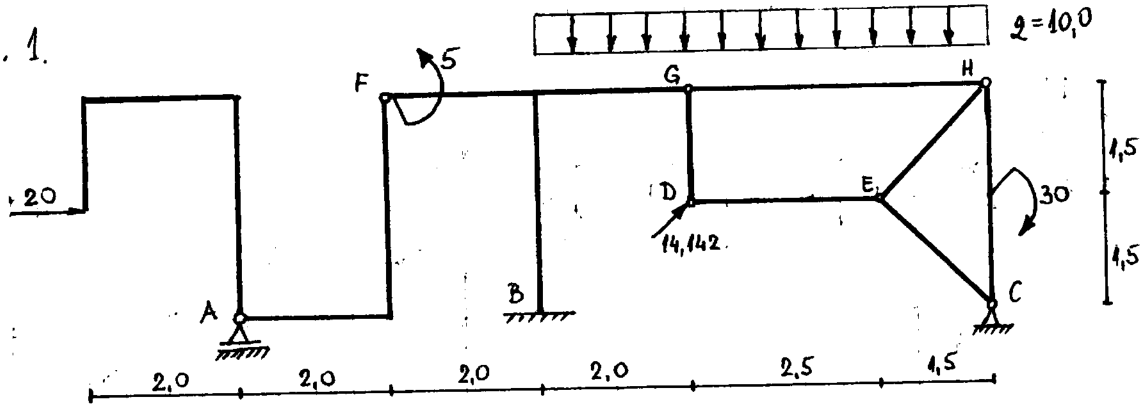


$\sum M = 0$

вежба бр. 13 10.05.2007.

Вежбање

Зад. 1.

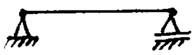


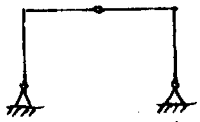
Решење: урадићемо декомпозицију носача

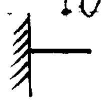
 3 непознате

 4 непознате

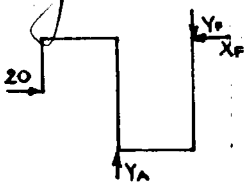
на крају мора да остане оно што може да стоји само


проста греда


лук на 3 зглоба


конзола

- део A – F

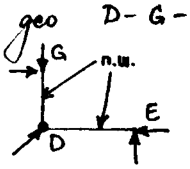


$\sum F_x = 0 \Rightarrow X_F = 20$

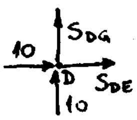
$\sum M_F = 0 \Rightarrow Y_A = 15$

$\sum F_Y = 0 \Rightarrow Y_F = 15$

- део D – G – E



$\Rightarrow$

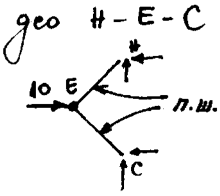


(равнотежа чвора D)

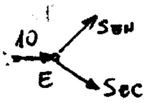
$\sum X = 0 \Rightarrow S_{DE} = -10$

$\sum Y = 0 \Rightarrow S_{DG} = -10$

- део H – E – C



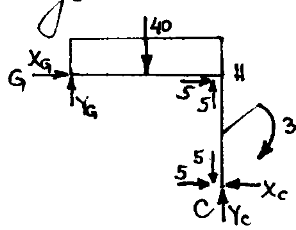
$\Rightarrow$



(равнотежа чвора E)

$$\left.\begin{array}{l}\sum X = 0 \\ \sum Y = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} S_{EH} = -7{,}071 \\ S_{EC} = -7{,}071 \end{array}$$

- део G – H – C



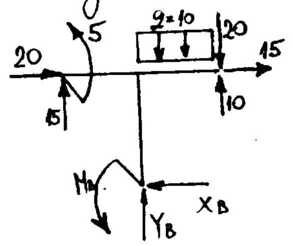
$\sum M_H = 0 \Rightarrow Y_G = 20$

$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_C = 20$

$\sum M_H^{доле} = 0 \Rightarrow X_C = -5$

$\sum X = 0 \Rightarrow X_G = -15$

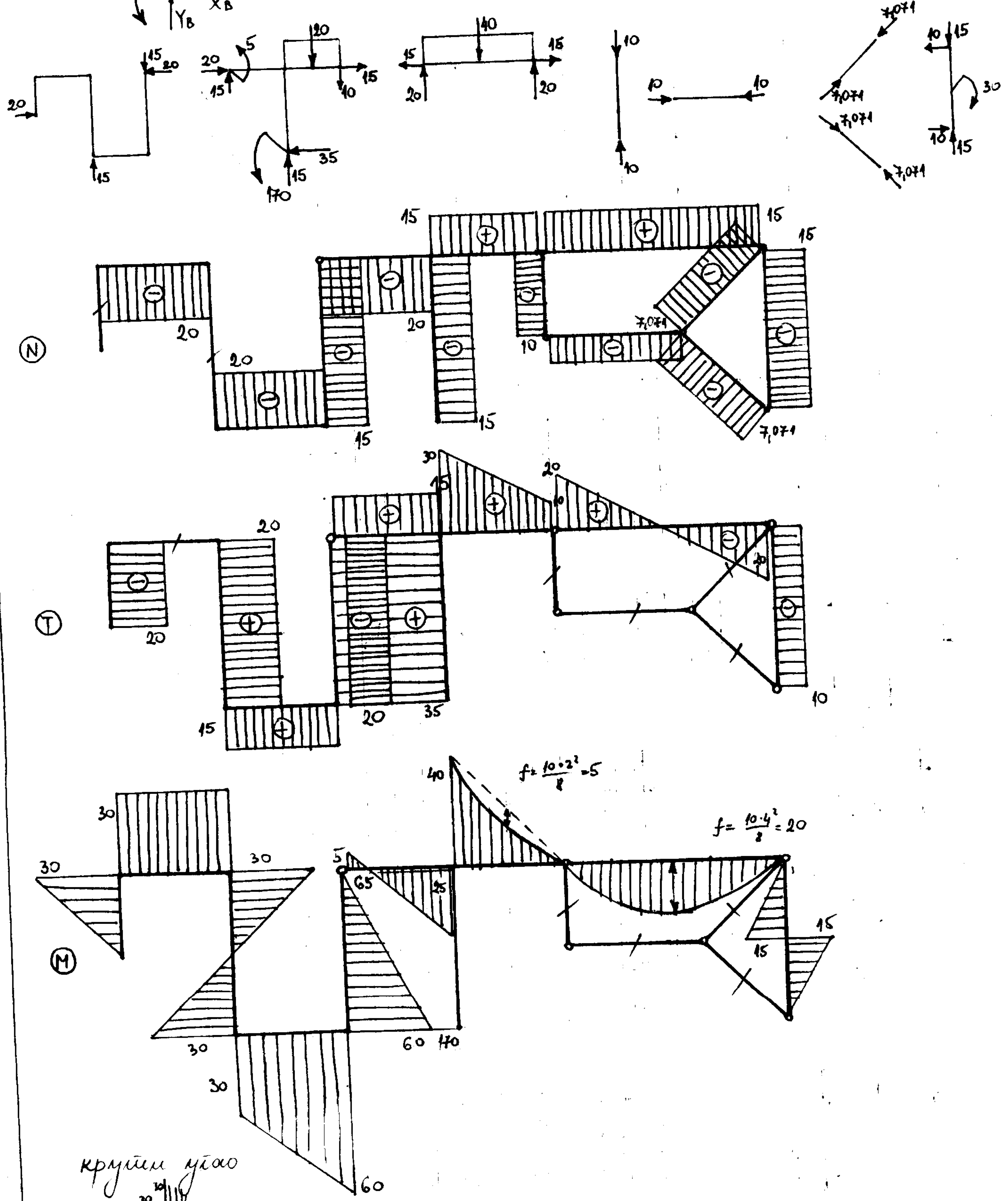
• конзола



$\sum X=0 \Rightarrow X_B=35$

$\sum Y=0 \Rightarrow Y_B=15$

$\sum M_B=0 \Rightarrow M_B=170$

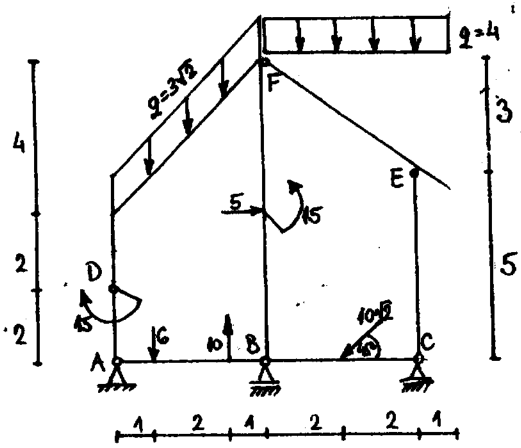


крутим угао

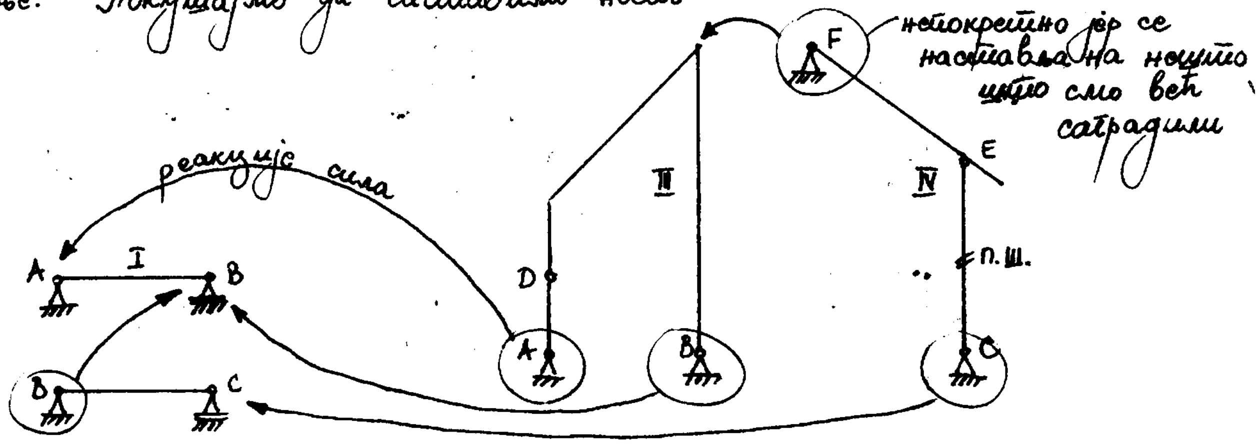
вежба бр. 14 — 14.05.2007.

Вежбање

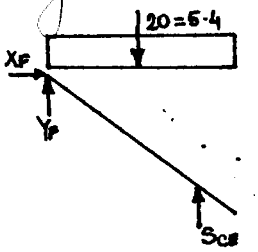
Зад. 1.



Решење: Покушајмо да саставимо носач



• део F-E

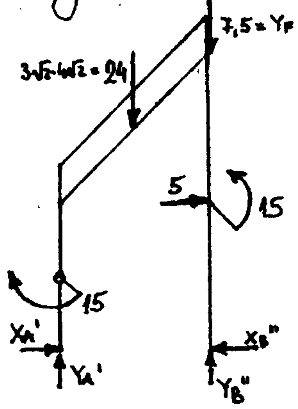


$\sum M_F=0:\ S_{CE}=12{,}5$

$\sum Y=0:\ Y_F=7{,}5$

$\sum X=0:\ X_F=0$

• део A-D-B



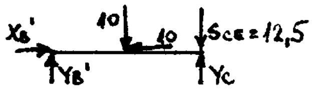
$\sum M_A=0:\ Y_B''=24{,}5$

$\sum Y=0:\ Y_A'=7$

$\sum M_D^{\text{доле}}=0:\ X_A'=7{,}5$

$\sum X=0:\ X_B'=12{,}5$

• део B-C

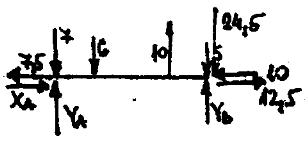


$\sum M_B=0:\ Y_C=17{,}5$

$\sum Y=0:\ Y_B'=5$

$\sum X=0:\ X_B'=10$

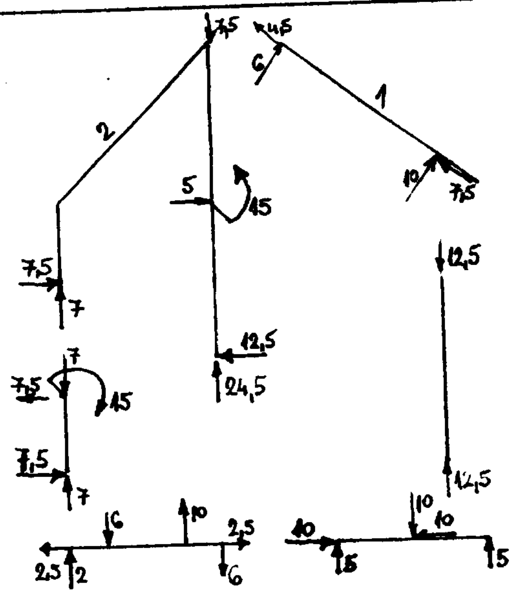
• део A-B



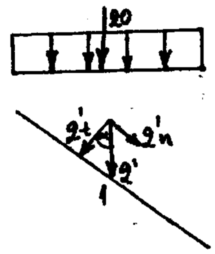
$\sum M_A=0:\ Y_B=23{,}5$

$\sum Y=0:\ Y_A=9$

$\sum X=0:\ X_A=5$

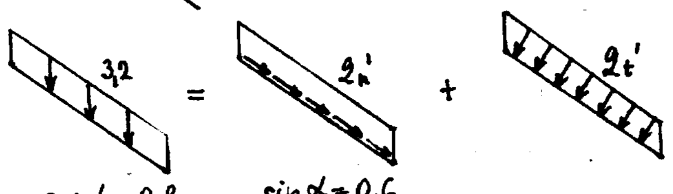


Посебно обратити пажњу на дејство једнако подељеног оптерећења на косе штапове 1 и 2



$q = 4 \qquad R = 4 \cdot 5$

$R = q' \cdot 6{,}25 \Rightarrow q' = \frac{20}{6{,}25} = 3{,}2$

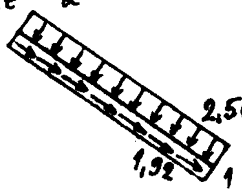


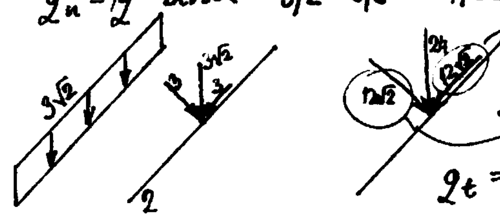
$\cos\alpha = 0{,}8 \qquad \sin\alpha = 0{,}6$

цела дужина штапа 6,25

(када имамо једнако подељено оптерећење $R = q \cdot l$, l-дона дужина опт.)

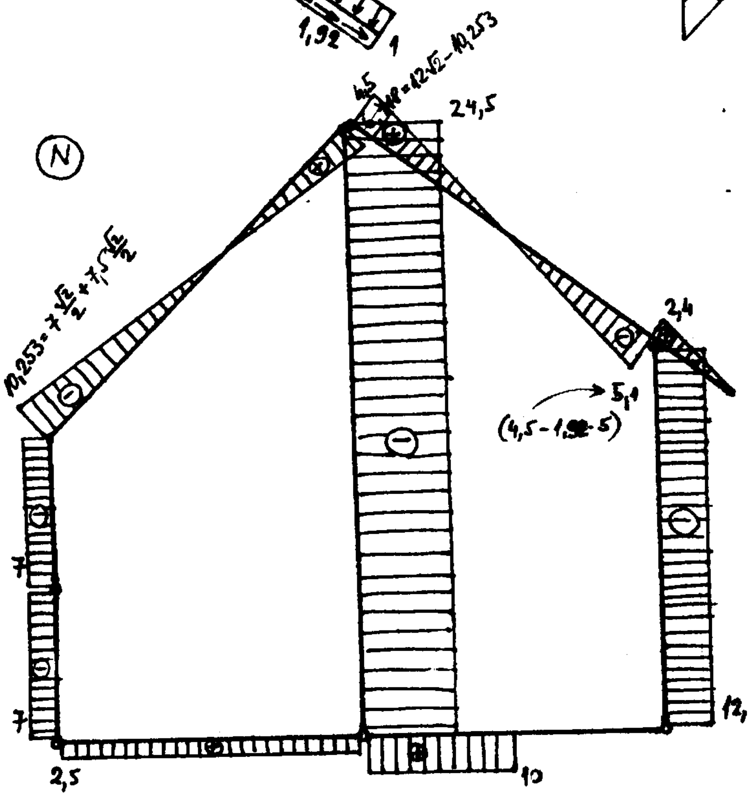
$q_t' = q' \cdot \cos\alpha = 3{,}2 \cdot 0{,}8 = 2{,}56 \qquad q_n' = q' \cdot \sin\alpha = 3{,}2 \cdot 0{,}6 = 1{,}92$



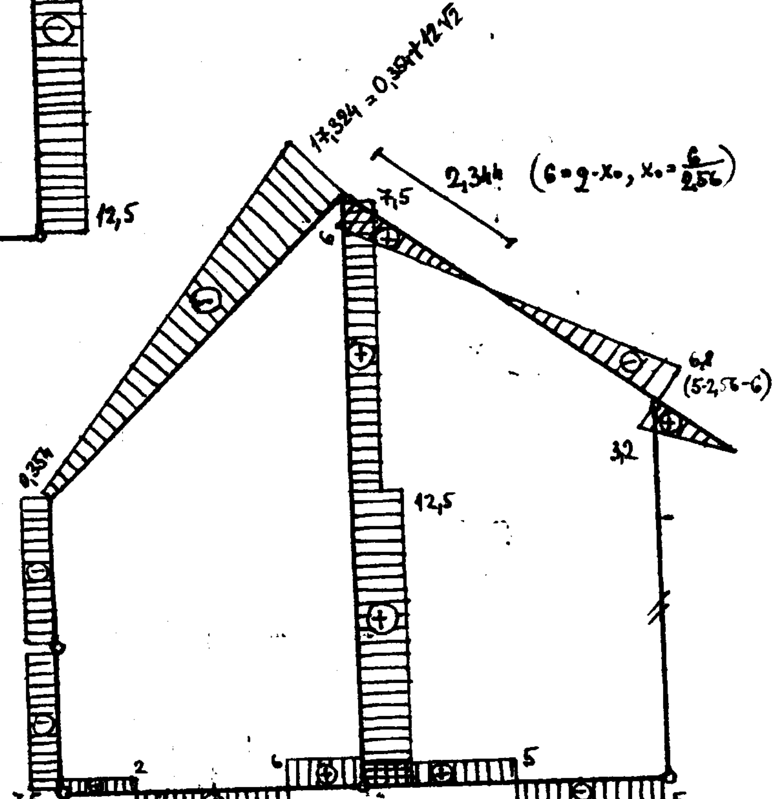


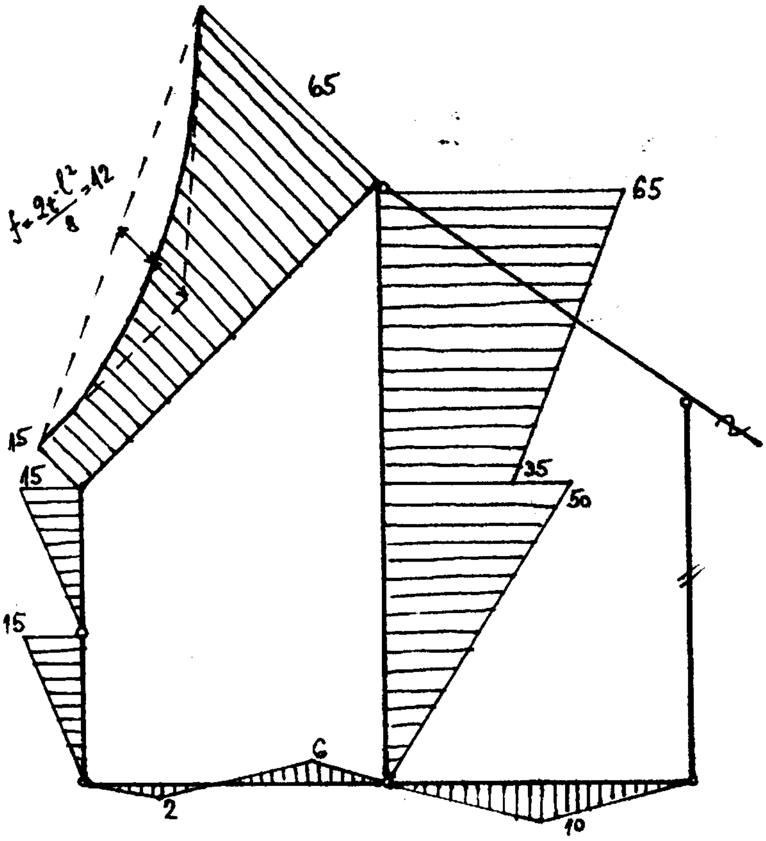
$q_n = \frac{12\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = 3$

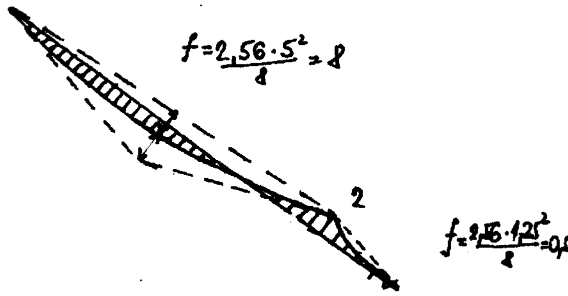
$q_t = \frac{12\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = 3$



На једном штапу ⊕ и ⊖ морају са различите стране.





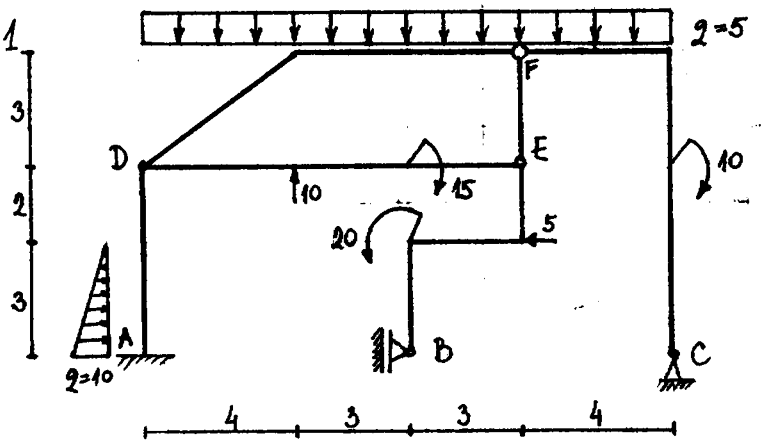


$M_{ext} = 6 \cdot x_0 - \underbrace{q x_0}_{6} \cdot \frac{x_0}{2} = \frac{6 \cdot 2,344}{2} = 7,03$

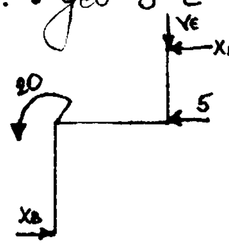
вежба бр. 15 — 17. 05. 2007.

Вежбање

Зад. 1



Решење: • део B-E



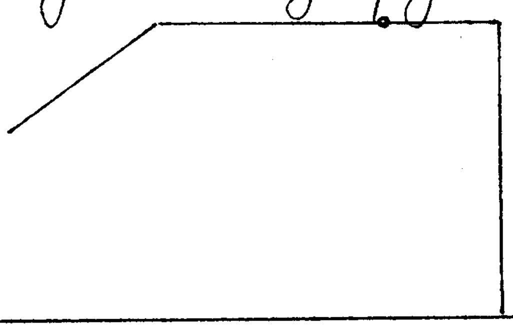
$\sum M_E = 0 \Rightarrow X_B = -2$

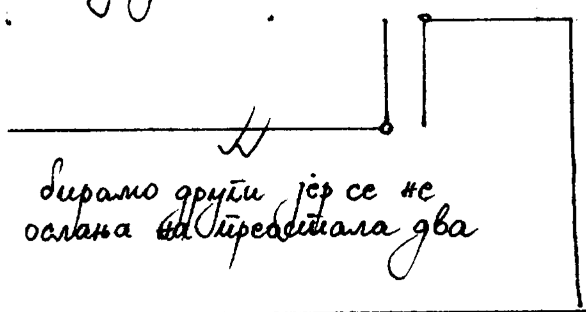
$\sum X = 0 \Rightarrow X_E = -7$

$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_E = 0$

* тространо оптерећена неће бити на колоквијуму и предроку (можда на испиту) *

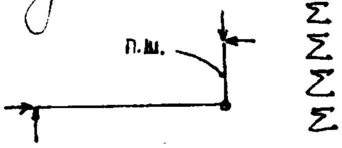
сада можемо да радимо 3 случаја



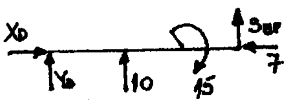


бирамо други јер се не ослања на преостала два

• део D – E – F

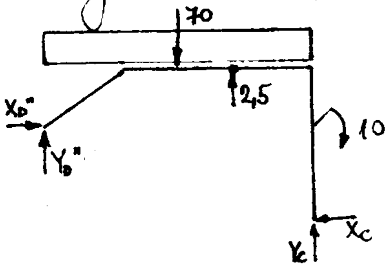


или



$\Sigma M_D = 0 \Rightarrow S_{EF} = -2,5$
$\Sigma Y = 0 \Rightarrow Y_D = -7,5$
$\Sigma X = 0 \Rightarrow X_D = 7,0$

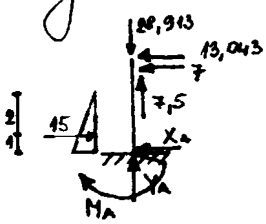
• део D – F – C



$\left.\begin{array}{l}\Sigma M_C = 0 \\ \Sigma M_F^{лево} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} X_D'' = 13,043 \\ Y_D'' = 28,913 \end{array}$

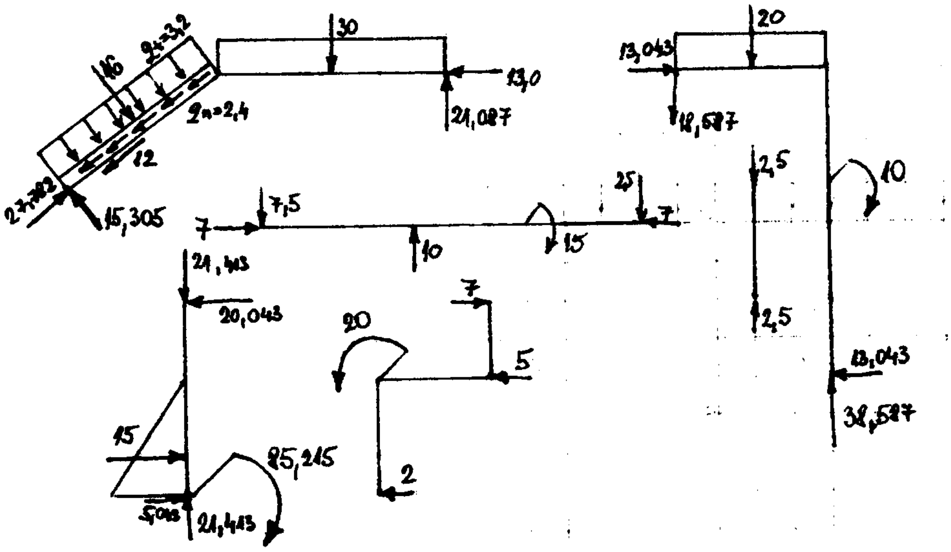
$\Sigma X = 0 \Rightarrow X_C = 13,043$
$\Sigma Y = 0 \Rightarrow Y_C = 38,587$

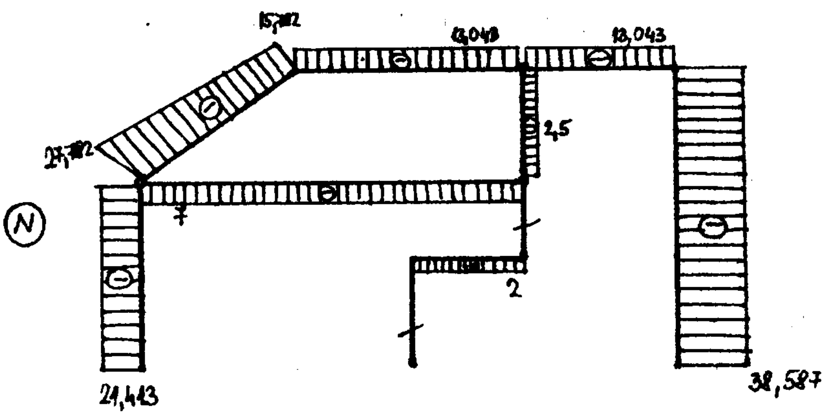
• део A – D

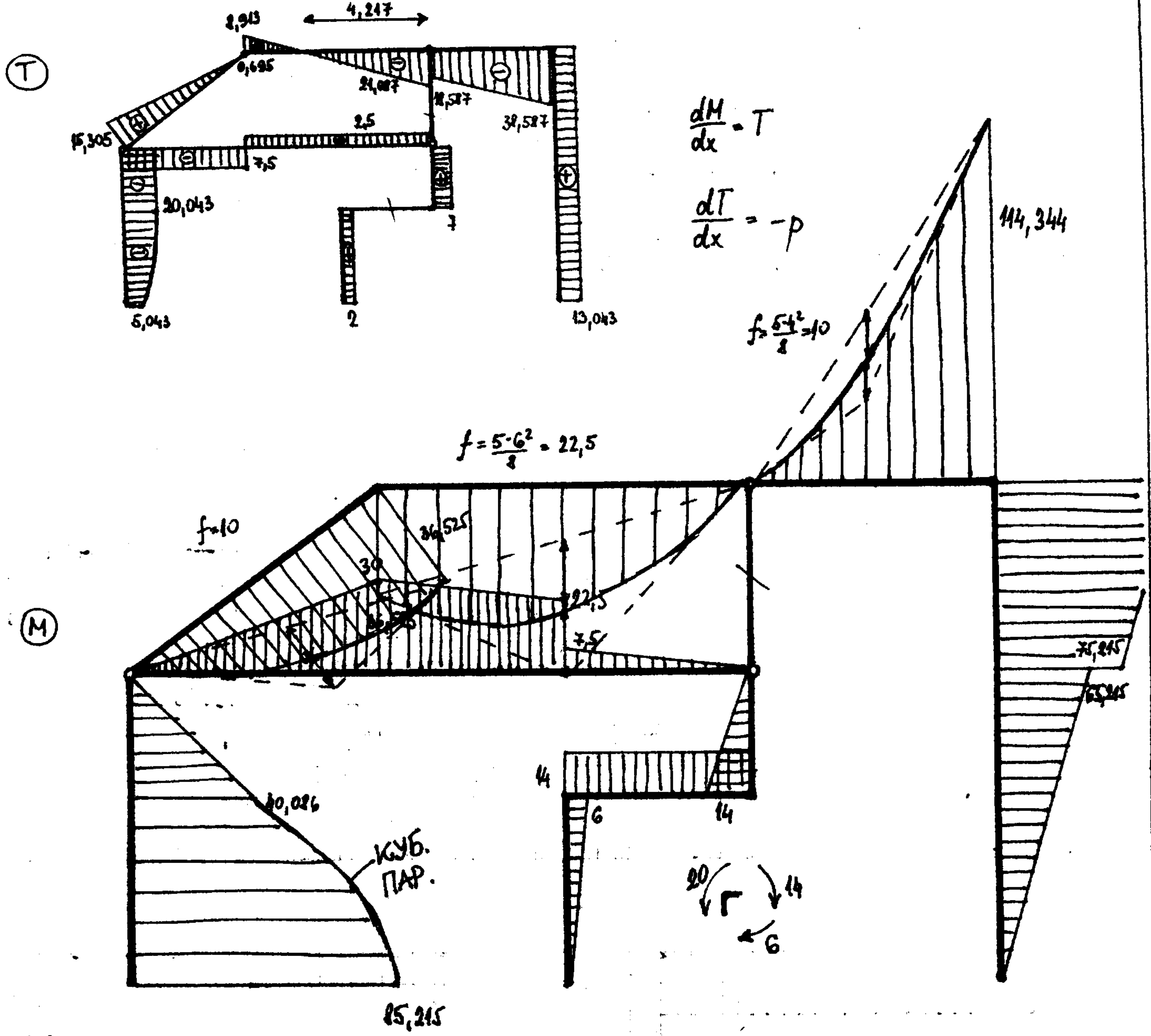


код било какво подељеног оптерећења резултанта делује у тежишту, а интензитет јој је површина

$\Sigma X = 0: \; X_A = -5,043$
$\Sigma Y = 0: \; Y_A = 21,415$
$\Sigma M_A = 0: \; M_A = 85,215$

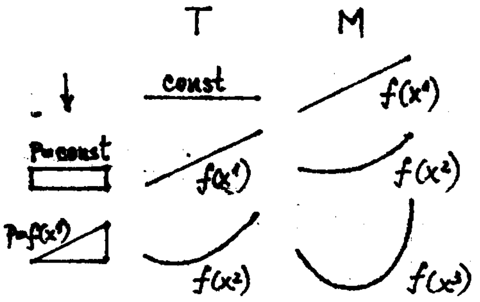






$$\frac{dM}{dx}=T$$

$$\frac{dT}{dx}=-p$$



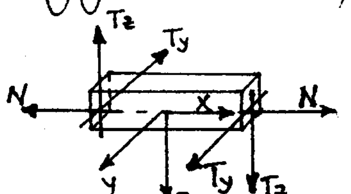
$$\frac{dM}{dx}=T$$

$$\frac{dT}{dx}=-p$$

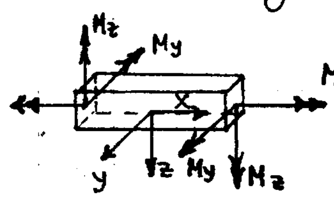
вежба бр. 16 — 21. 05. 2007.

Дијаграми сила у простору

* 2. задатак на продроку, 3. задатак на испиту



6 сила у простору

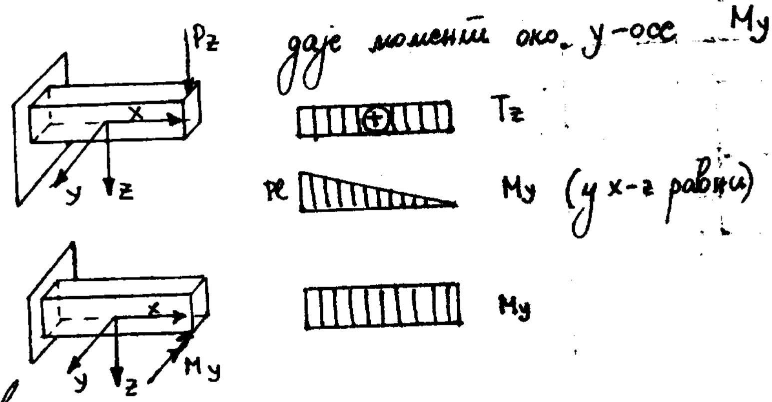


Mт (моменат торзије)

⊕ смерови када x излази из пресека
⊕ смерови када x улази у пресек

My и Mz цртамо на затегнуто/ страни (уцртан мом. затежу ове стране)

P_z даје моменат око y-осе M_y



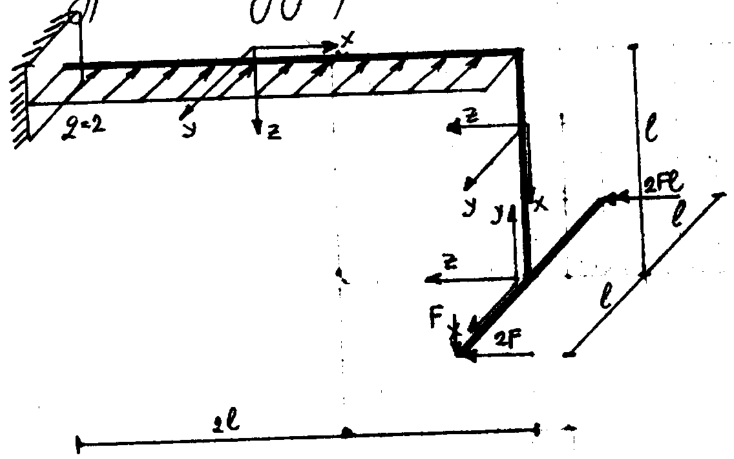
$$\frac{dM_y}{dx} = T_z, \quad \frac{dT_z}{dx} = -P_z$$

аналогно:

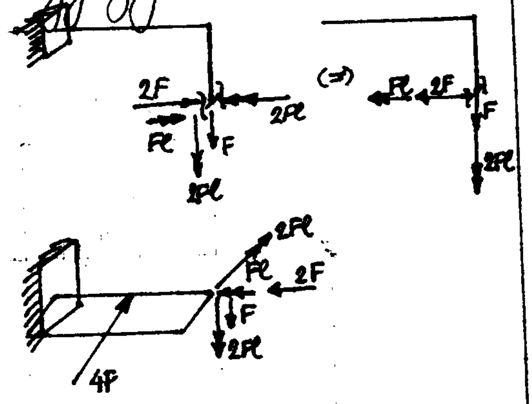
$$\frac{dM_z}{dx} = T_y, \quad \frac{dT_y}{dx} = -P_y$$

Радићемо два статичка система: конзолу и греду.

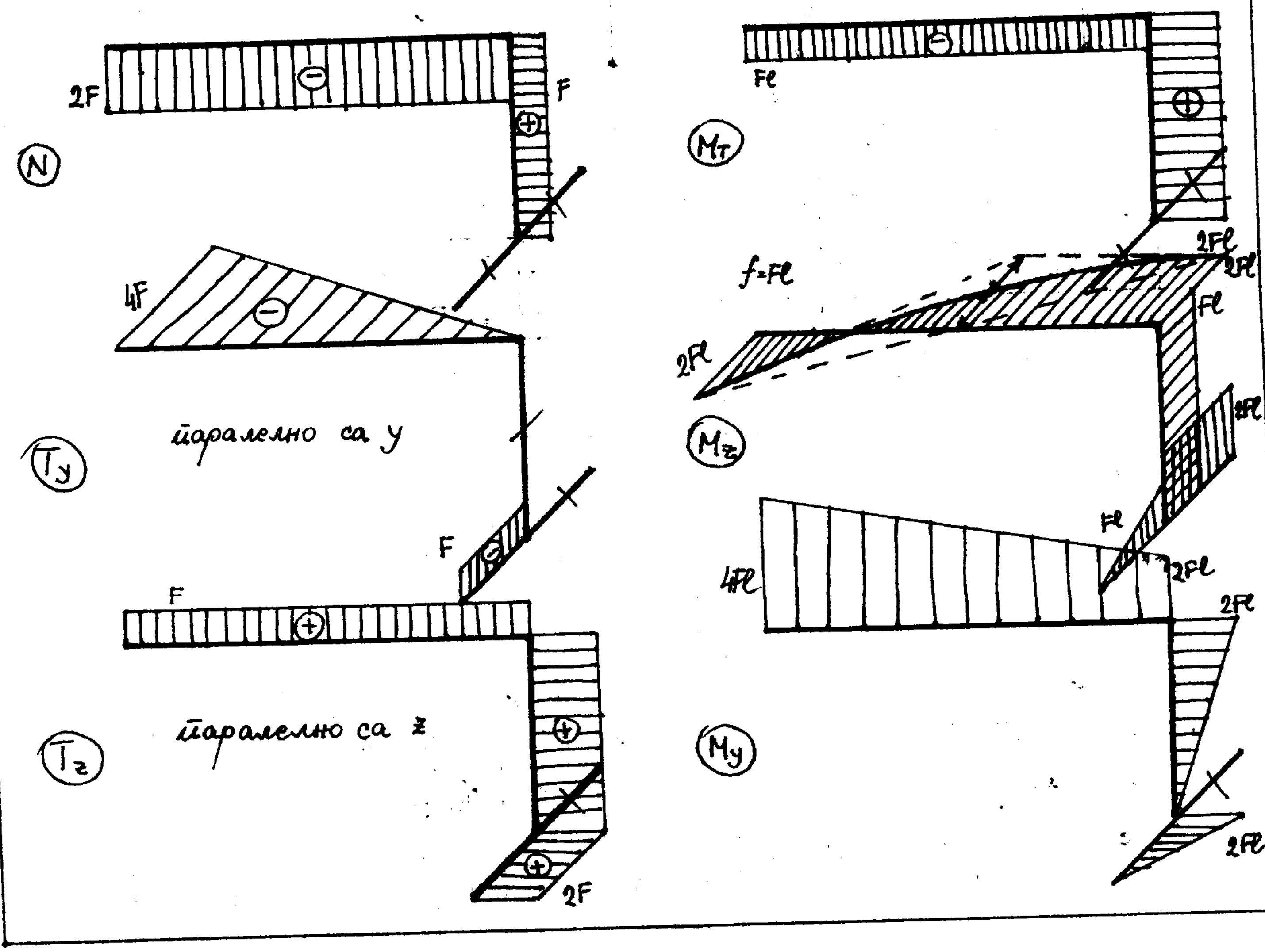
Зад. 1. Нацртати дијаграме сила



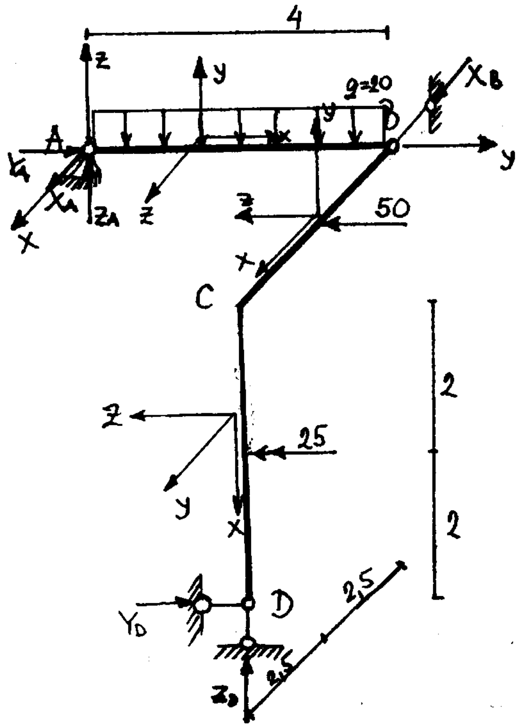
Редукција сила



Решење: овде нећемо одређивати реакције веза већ идемо од слободног краја

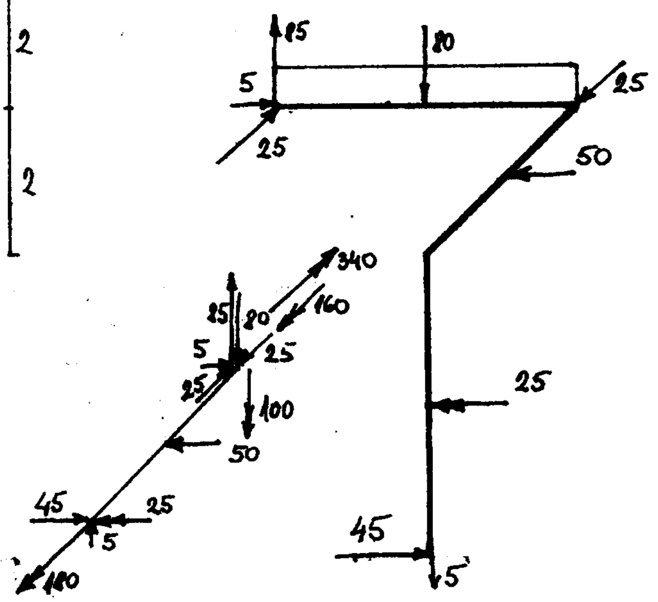


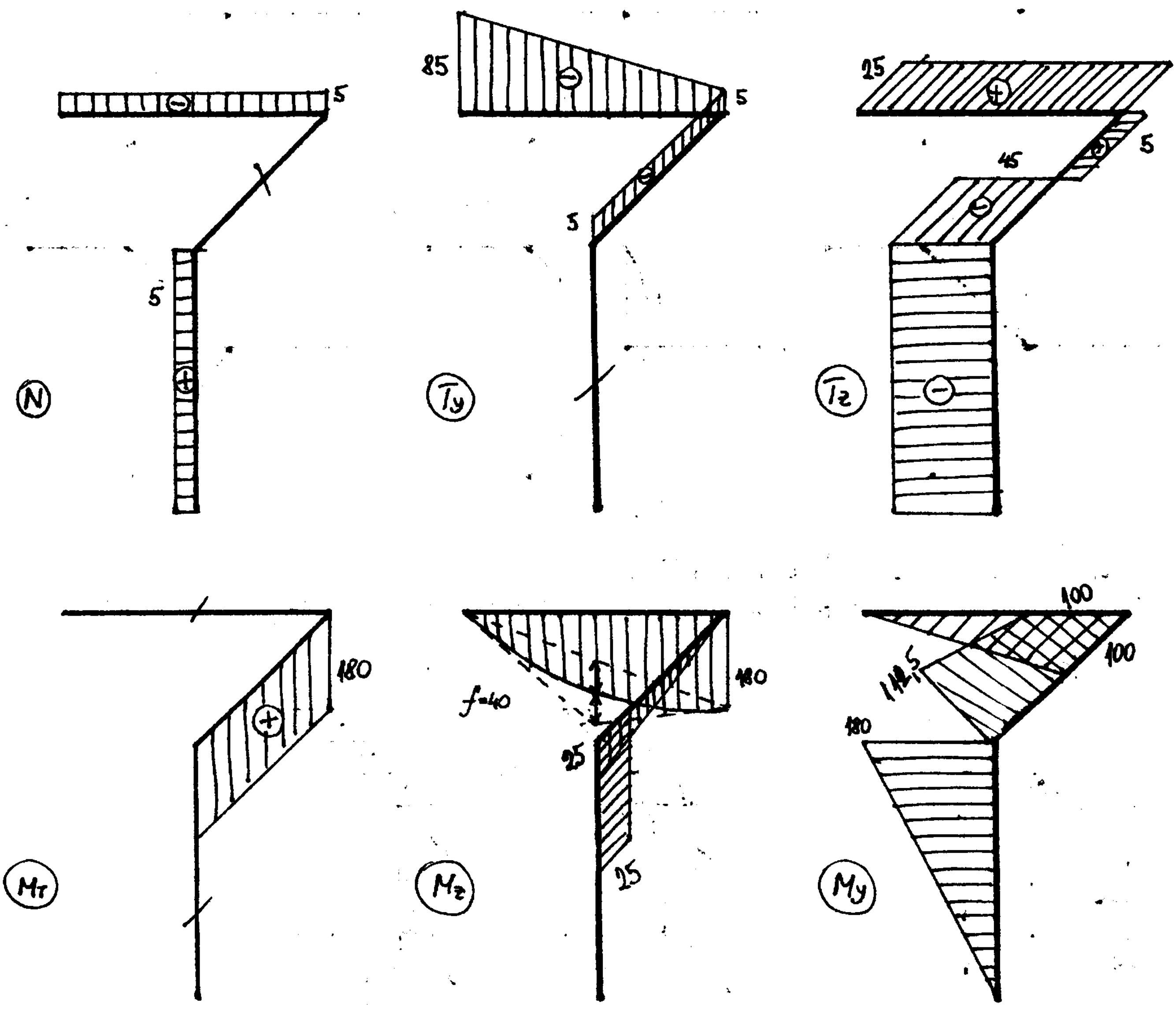
Зад. 2.



Решение:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma X=0 \\ \Sigma Y=0 \\ \Sigma Z=0 \\ \Sigma M_x=0 \\ \Sigma M_y=0 \\ \Sigma M_z=0 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} X_A=-25 \\ Y_A=5 \\ Z_A=85 \\ Y_D=85 \\ Z_D=-5 \\ X_B=25 \end{array}$$



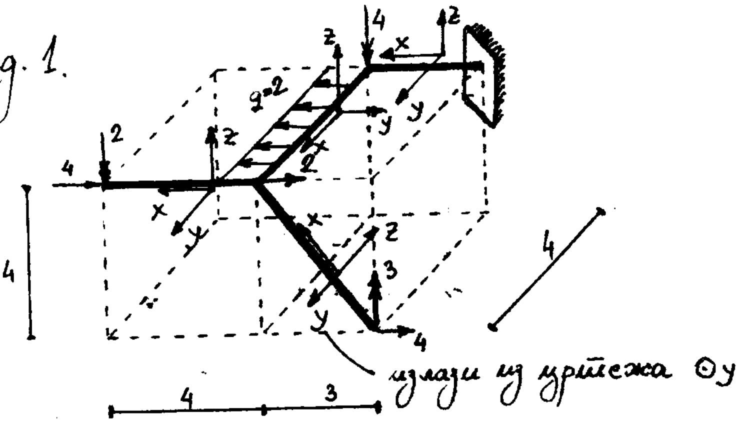


вежба бр. 16

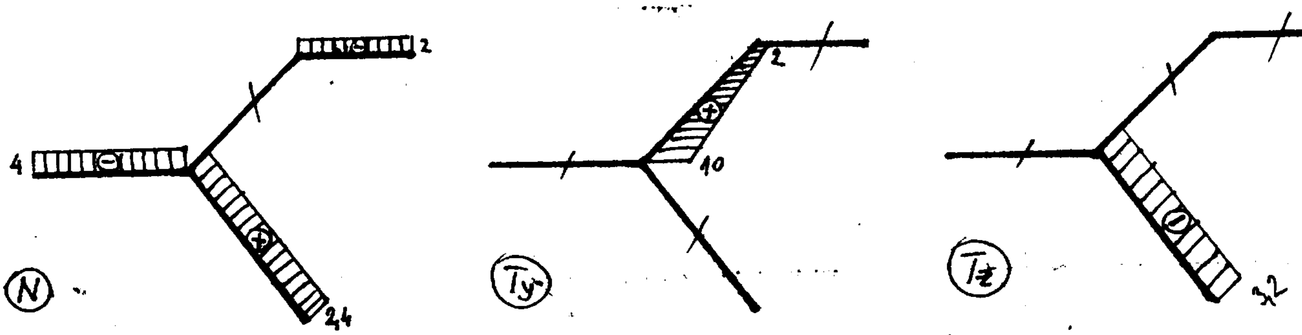
24.05.2007.

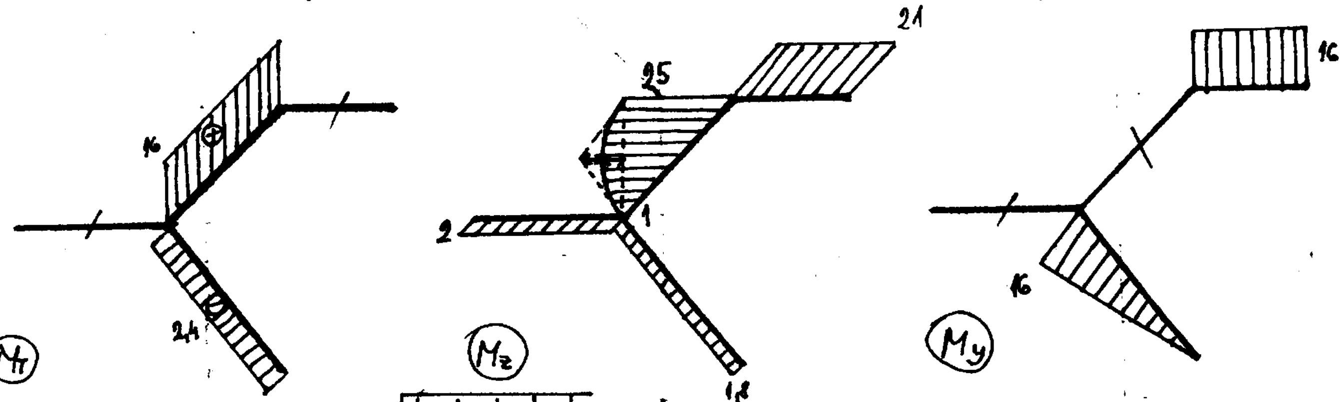
Вежбање

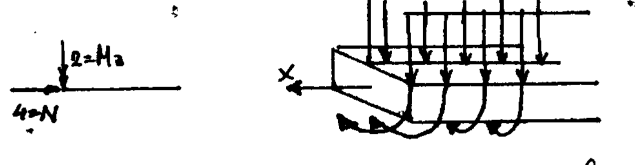
Зад. 1.



Решење: пошто имамо конзолу крећемо са слободних крајева
за дијаграме N и M_T није битно у којој равни цртамо
(код M_T знак се одређује као нормална сила)
T_y, M_z – дијаграм паралелан са y-осом
T_z, M_y – дијаграм паралелан са z-осом

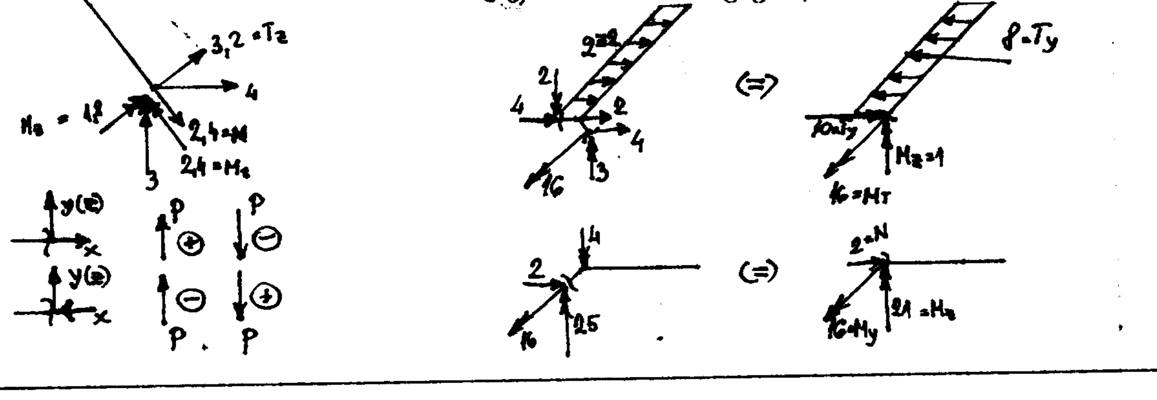




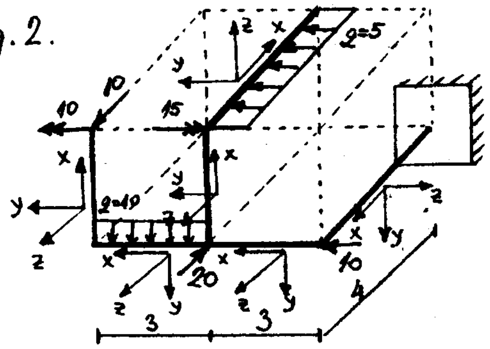


концентрисан моменат – дијаграм линеаран

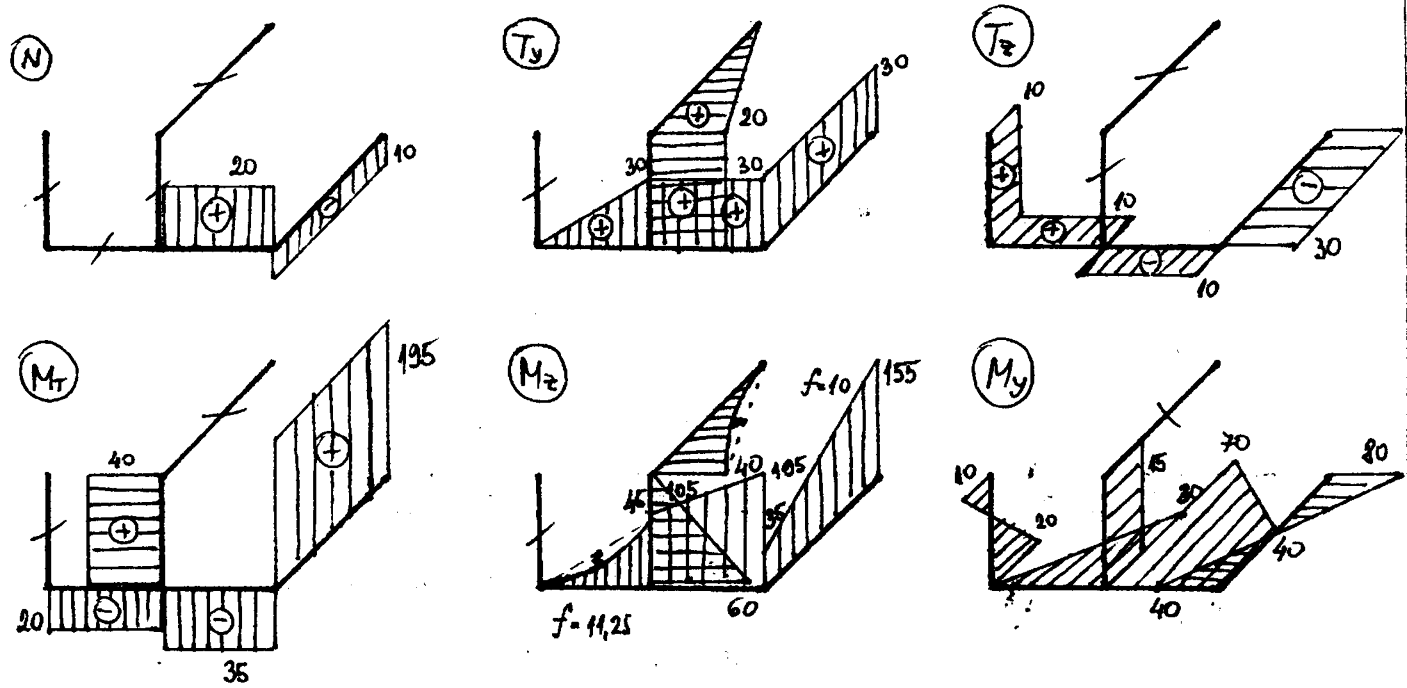
уцртавамо са дијаграма



Зад. 2.



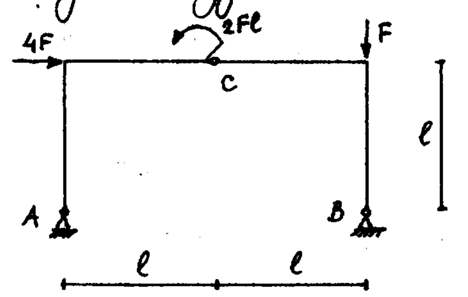
Решење:



вежба бр. 17 28. 05. 2007.

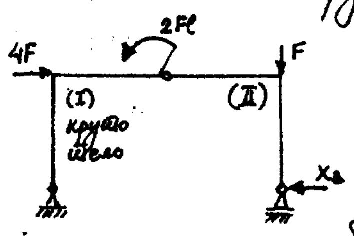
Општа једначина статике

Зад. 1. Користећи општу једначину статике одредити реакције веза у ослонцу B као и моменат савијања у ослонцу D.



Решење: Принцип виртуелног померања

* $X_B = ?$ $n=0$ - број степени слободе

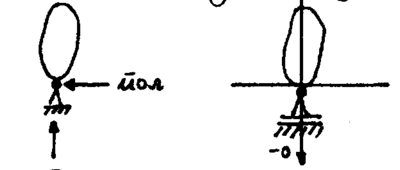


прешли смо у систем $n=1$; укупан виртуелни рад

$\delta A = \sum \vec{F} \cdot \delta \vec{r} + \vec{M} \delta \vec{\varphi} = 0$ О.Ј.С.

$\delta A = \sum \vec{F} \cdot \delta \vec{r} + \vec{M} \cdot \delta \vec{\varphi} = 0$

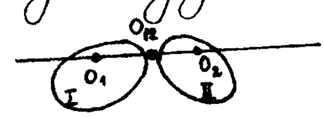
„пол" - тренутни центар ротације



непокретна тачка

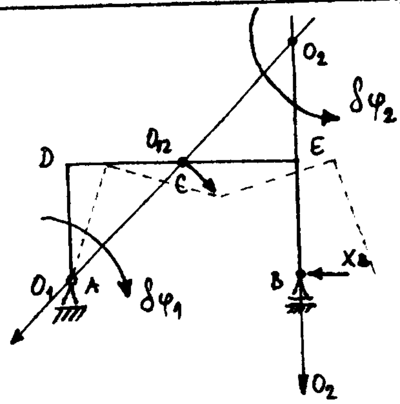
када покретна, пол управан на правац кретања

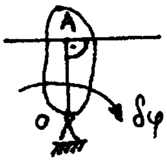
Арнолд - Кенедијева теорема



O_1, O_2, O_{12} - колинеарни

само смер 1. $\delta\varphi$ претпостављамо





правац померања управан на $\overline{OA}$

$\sin\delta\varphi \approx \delta\varphi \Rightarrow \delta r = \delta\varphi\cdot\overline{OA}$

виртуелно померање (мало али могуће)

$\delta\bar{r} = \delta\bar{\varphi}\times\bar{\rho}$

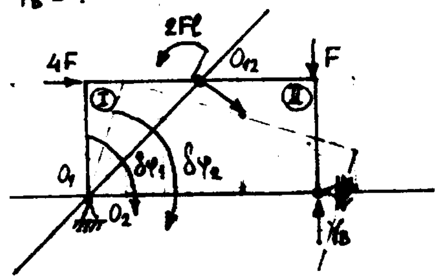
$$\left.\begin{aligned} \delta r_{O_{12}}^{I} &= \delta\varphi_1\cdot\overline{O_1O_{12}} = \delta\varphi_1\cdot l\sqrt{2} \\ \delta r_{O_{12}}^{II} &= \delta\varphi_2\cdot\overline{O_2O_{12}} = \delta\varphi_2\cdot l\sqrt{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta r_{O_{12}}^{I} = \delta r_{O_{12}}^{II} \Rightarrow \delta\varphi_1 = \delta\varphi_2$$

нађемо ротацију 2. у функцији 1.

$$\delta A = 4F\cdot\delta r_D^x + \cancel{F\cdot\delta r_E^y}^{\,0} - X_B\cdot\delta r_B^x - 2Fl\cdot\delta\varphi_1 = 0$$

$$4F(\cancel{\delta\varphi_1}\cdot l) + F\cdot 0 - X_B(\cancel{\delta\varphi_2}\cdot 2l) - 2Fl\cdot\cancel{\delta\varphi_1} = 0 \Rightarrow X_B = F$$

* $Y_B = ?$

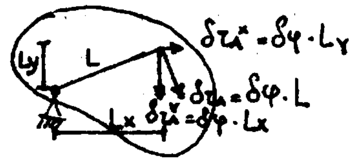


$\delta r_{O_{12}}^{I} = \delta r_{O_{12}}^{II}$

$\delta\varphi_1 l\sqrt{2} = \delta\varphi_2 l\sqrt{2} \Rightarrow \delta\varphi_1 = \delta\varphi_2$

$\delta A = 4F\cdot\delta r_D^x - 2Fl\cdot\delta\varphi_1 + F\cdot\delta r_E^Y - Y_B\cdot\delta r_B^Y = 0$

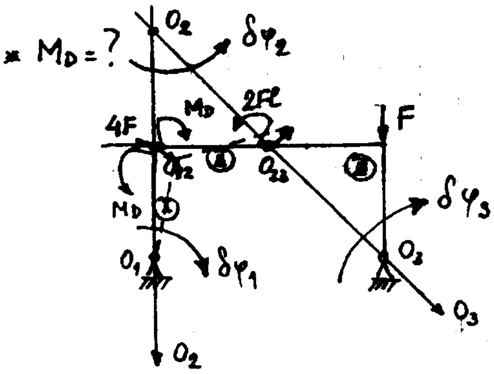
$\delta A = 4F(\delta\varphi_1\cdot l) - 2Fl(\delta\varphi_1) + F\cdot(\delta\varphi_2\cdot 2l) - Y_B\cdot(\delta\varphi_2\cdot 2l) = 0$



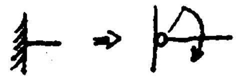
$(\delta r_E = \delta\varphi_2\cdot\sqrt{5}\,l)$

$4Fl - 2Y_B l = 0 \Rightarrow Y_B = 2F$

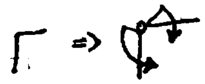
* $M_D = ?$



- код конзоле један моменат



- код крутог угла два момента



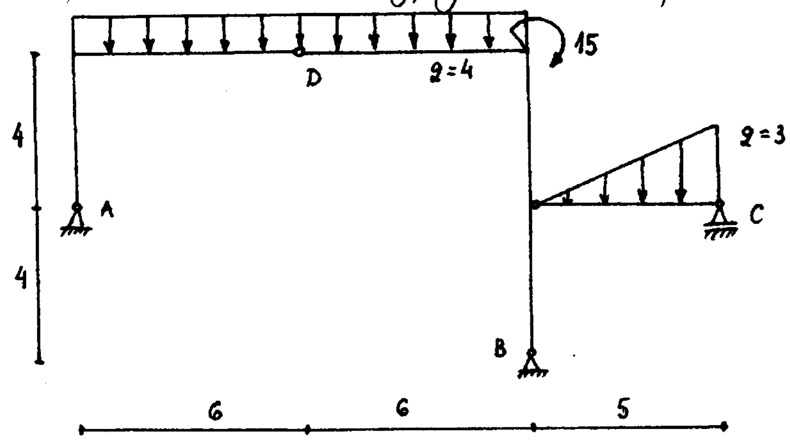
$\delta r_{O_{12}}^{I} = \delta r_{O_{12}}^{II} \Rightarrow \delta\varphi_1 l = \delta\varphi_2 l \Rightarrow \delta\varphi_1 = \delta\varphi_2$

$\delta r_{O_{23}}^{II} = \delta r_{O_{23}}^{III} \Rightarrow \delta\varphi_2 l\sqrt{2} = \delta\varphi_3 l\sqrt{2} \Rightarrow \delta\varphi_2 = \delta\varphi_3$

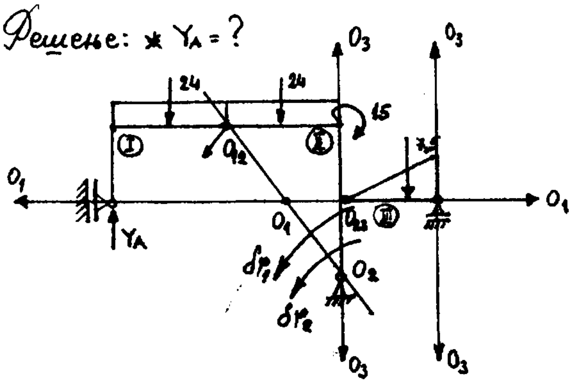
$\delta A = 4F(\delta\varphi_1\cdot l) - M_D\cdot\delta\varphi_1 - M_D\cdot\delta\varphi_2 + 2Fl\cdot\delta\varphi_2 + F\cdot 0 = 0 \;/:\delta\varphi_1$

$6Fl - 2M_D = 0 \Rightarrow M_D = 3Fl$

Зад. 2. (са усменог дела испита)
Користећи О.Ј.С. одредити све вертикалне спољашње реакције веза.



Решење: * $Y_A = ?$



принцип виртуелног померања важи само за тела са једним степеном слободе

$O_3 \to \infty$

$\Rightarrow$ тело III се транслира

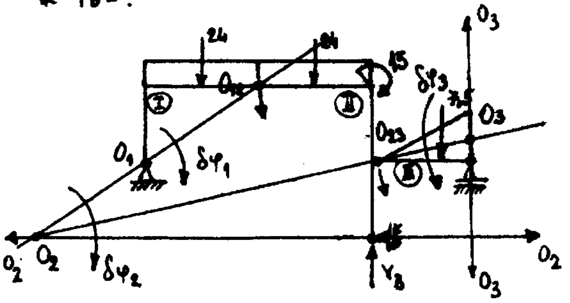
$\Rightarrow \delta\varphi_3 = 0$

$\Rightarrow$ све тачке тела имају једнако померање

$$\delta r_{O_{12}}^{I} = \delta r_{O_{12}}^{II} \Rightarrow \delta\varphi_1 \cdot 5 = \delta\varphi_2 \cdot 10 \Rightarrow \delta\varphi_1 = 2\delta\varphi_2$$

$$\delta A = -Y_A\left(\overset{2\delta\varphi_2}{\cancel{\delta\varphi_1}} \cdot 9\right) + 24\left(\overset{2\delta\varphi_2}{\cancel{\delta\varphi_1}} \cdot 6\right) + 24(\delta\varphi_2 \cdot 3) - 15\,\delta\varphi_2 + 7{,}5 \cdot 0 = 0 \;/ : \delta\varphi_2 \Rightarrow Y_A = 19{,}166$$

* $Y_B = ?$



$\delta r_{O_{12},Y}^{I} = \delta r_{O_{12},Y}^{II}$ (исто у правцу било које осе)

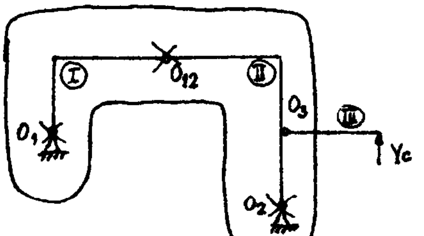
$\delta\varphi_1 \cdot 6 = \delta\varphi_2 \cdot 12 \Rightarrow \delta\varphi_1 = 2\delta\varphi_2$

$\delta r_{O_{23},Y}^{II} = \delta r_{O_{23},Y}^{III}$

$\delta\varphi_2 \cdot 12 = \delta\varphi_3 \cdot 5 \Rightarrow \delta\varphi_3 = \frac{12}{5}\delta\varphi_2$

$$\delta A = 24(\delta\varphi_1 \cdot 3) + 24(\delta\varphi_2 \cdot 15) + 15\,\delta\varphi_2 - Y_B(\delta\varphi_2 \cdot 12) + 7{,}5\left(\delta\varphi_3 \cdot \frac{5}{3}\right) = 0 \Rightarrow Y_B = 31{,}333$$

* $Y_C = ?$

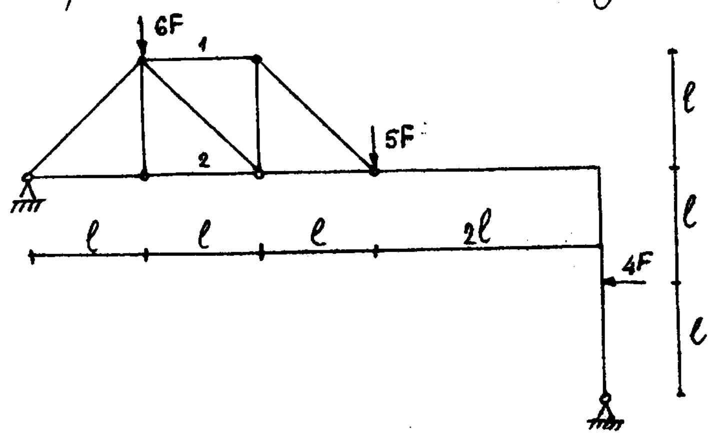


лук на 3 зглоба је непомерљив
$\Rightarrow$ тачка O_3 је непокретна

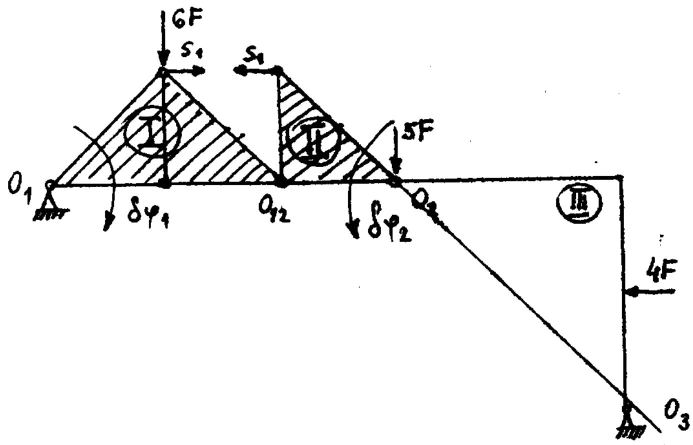
$\delta A = 7{,}5\left(\delta\varphi_3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5\right) - Y_C(\delta\varphi_3 \cdot 5) = 0$

$\Rightarrow Y_C = 5$

Зад. 3. Применом О.Ј.С. наћи силе у штаповима 1 и 2.



Решење: * $S_1 = ?$



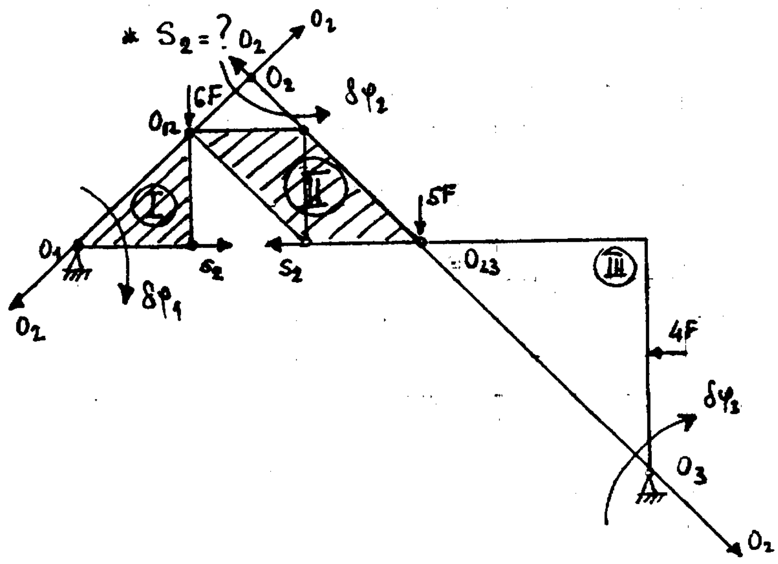
$O_2 \equiv O_3 \Rightarrow$ тело III непокретно

$$\left.\begin{aligned} \delta r_{O_{12}}^{I} &= \delta\varphi_1 \cdot 2l \\ \delta r_{O_{12}}^{II} &= \delta\varphi_2 \cdot l \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta\varphi_1 = \frac{1}{2}\delta\varphi_2$$

$$\delta A = 6F(\delta\varphi_1 \cdot l) + S_1(\delta\varphi_2 \cdot l) + S_1(\cancel{\delta\varphi_2}^{\,2\delta\varphi_1} \cdot 2l) = 0$$

$$6Fl = 3S_1 l \quad \Rightarrow \quad S_1 = -2F$$

* $S_2 = ?$



$$\delta\varphi_1 = \frac{1}{2}\delta\varphi_2$$

$$\delta\varphi_3 = \frac{3}{4}\delta\varphi_2$$

$$\delta A = 6F\cdot(\delta\varphi_1 \cdot l) - S_2\left(\delta\varphi_2 \cdot \frac{3l}{2}\right) - 5F\left(\delta\varphi_2 \cdot \frac{3l}{2}\right) - 4F(l \cdot \delta\varphi_3) \quad \Rightarrow S_2 = -5F$$

ЉУБОМИР/06