

# Zadatak 10: Dijagrami verovatnoće

1. Konstruisati dijagrame (papire):

a) normalne verovatnoće

b) logaritamsko-normalne verovatnoće

c) Gumbelove verovatnoće

2. Na dijagrame verovatnoće naneti teorijske funkcije raspodele i kompromisne verovatnoće za niz iz zadatka 8. Raspodelu Pirson III naneti na papir normalne verovatnoće.

3. Na krivama teorijskih raspodela na dijagramima verovatnoće označiti kvantile povratnih perioda 2, 5, 10, 20, 100 i 1000 godina (iz tačke 3 zadatka 8).

4. Odrediti maksimalno odstupanje teorijskih raspodela od osmotrene serije grafičkim putem i testirati njegovu statističku značajnost pomoću testa Kolmogorova. Odabrati najbolju teorijsku raspodelu za razmatrani niz.

## Objašnjenje

### *O dijagramima verovatnoće*

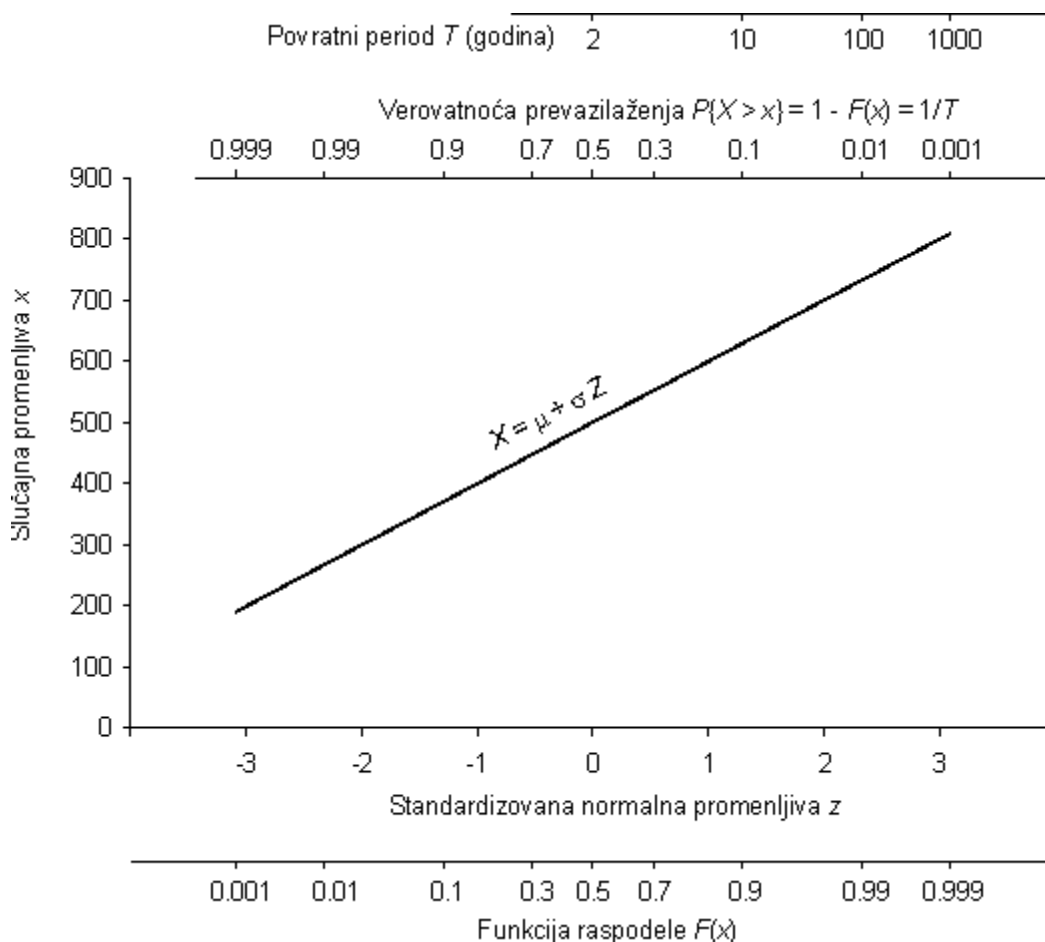
Grafička predstava funkcija teorijskih raspodela na dijagramima sa linearnom (aritmetičkom) podelom za vrednosti slučajne promenljive i vrednosti funkcije raspodele često nije pogodna za praktičnu primenu jer se verovatnoće ekstremnih vrednosti na takvim dijagramima teško očitavaju u oblastima gde funkcija raspodele teži nuli ili jedinici. Ovaj problem se može prevazići konstrukcijom *dijagrama verovatnoće* (ili *papira verovatnoće*) neke raspodele na kome se ta raspodela prikazuje kao prava linija. To se može postići za dvoparametarske raspodele u kojima je moguće uvesti smenu slučajne promenljive  $X$  u obliku standardizovane slučajne promenljive čija funkcija raspodele nema parametre. Takve raspodele su normalna i Gumbelova raspodela, pa se dijagrami verovatnoće ovih raspodela najčešće koriste.

Mogućnost "ispravljanja" funkcije raspodele u pravu liniju krije se u linearnoj vezi između slučajne promenljive i odgovarajuće standardizovane promenljive. Tako ova veza za *normalnu raspodelu* glasi:

$$X = \mu + \sigma Z$$

gde je  $Z$  standardizovana normalna promenljiva, a  $\mu$  i  $\sigma$  parametri normalne raspodele promenljive  $X$ . Na dijagramu  $X$ - $Z$  ova zavisnost je prava linija. S obzirom da funkcija raspodele standardizovane normalne promenljive  $Z$  nema parametre, odnosno postoji jednoznačna veza između  $z$  i  $\Phi(z) = F(x)$ , umesto standardizovane promenljive  $Z$  mogu se nanositi vrednosti funkcije raspodele. Treba primetiti da se linearna podela za promenljivu  $Z$  pretvara u nelinearnu podelu za funkciju raspodele. Ovako konstruisan dijagram (slika 1) naziva se dijagramom normalne verovatnoće. Na dijagramima verovatnoće je uobičajeno da se na ordinatu nanose vrednosti slučajne promenljive  $X$  u nekoj razmeri,

dok se na apscisi nalaze vrednosti funkcije raspodele  $F(x)$ , odnosno verovatnoće  $P\{X \leq x\}$ . Umesto funkcije raspodele, na apscisu se mogu nanositi i verovatnoće  $P\{X > x\}$  ili vrednosti povratnog perioda  $T$ , s obzirom da su sve ove veličine međusobno povezane jednoznačnim vezama.

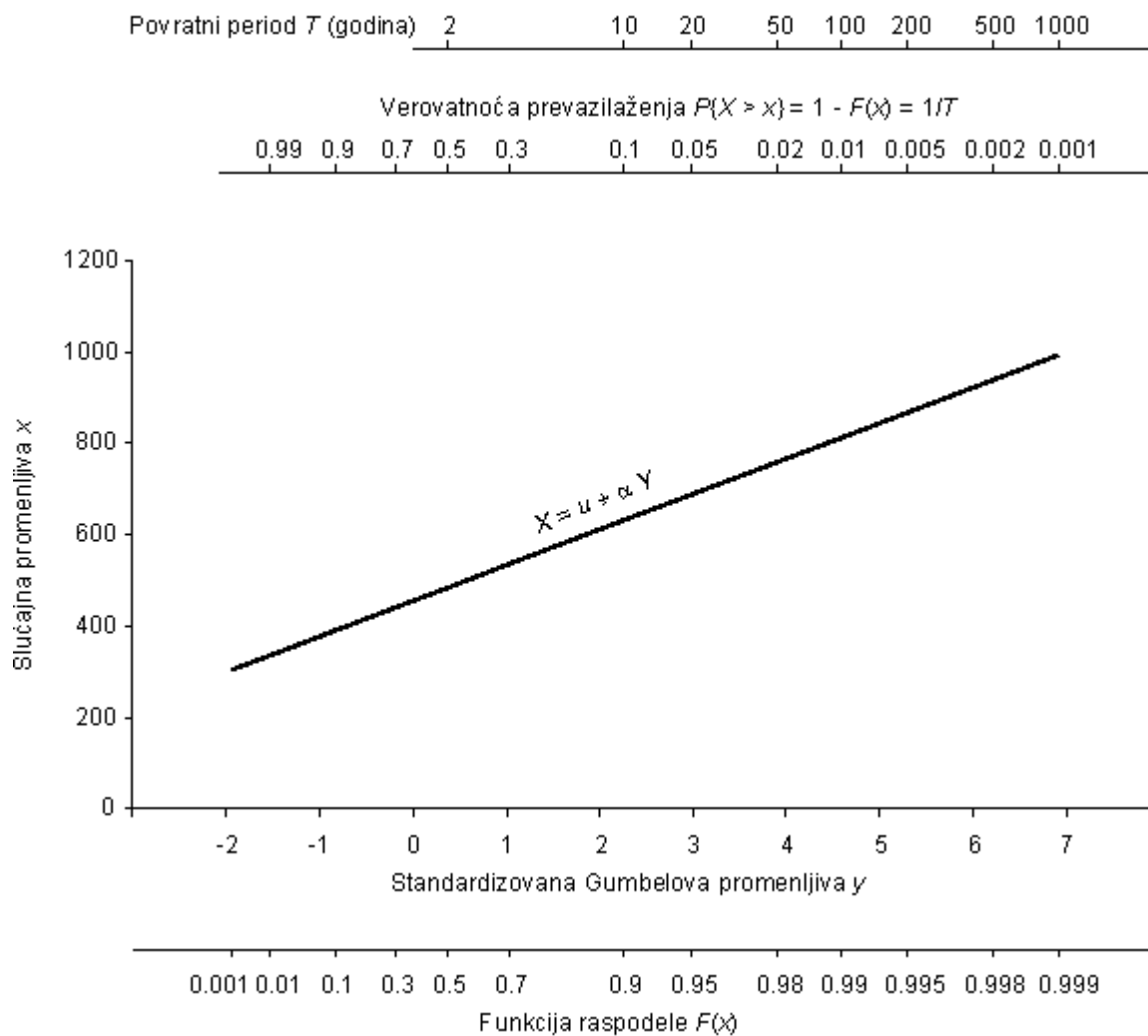


Slika 1. Papir normalne raspodele.

Na sličan način se konstruiše i dijagram *Gumbelove verovatnoće*. Za Gumbelovu raspodelu važi veza:

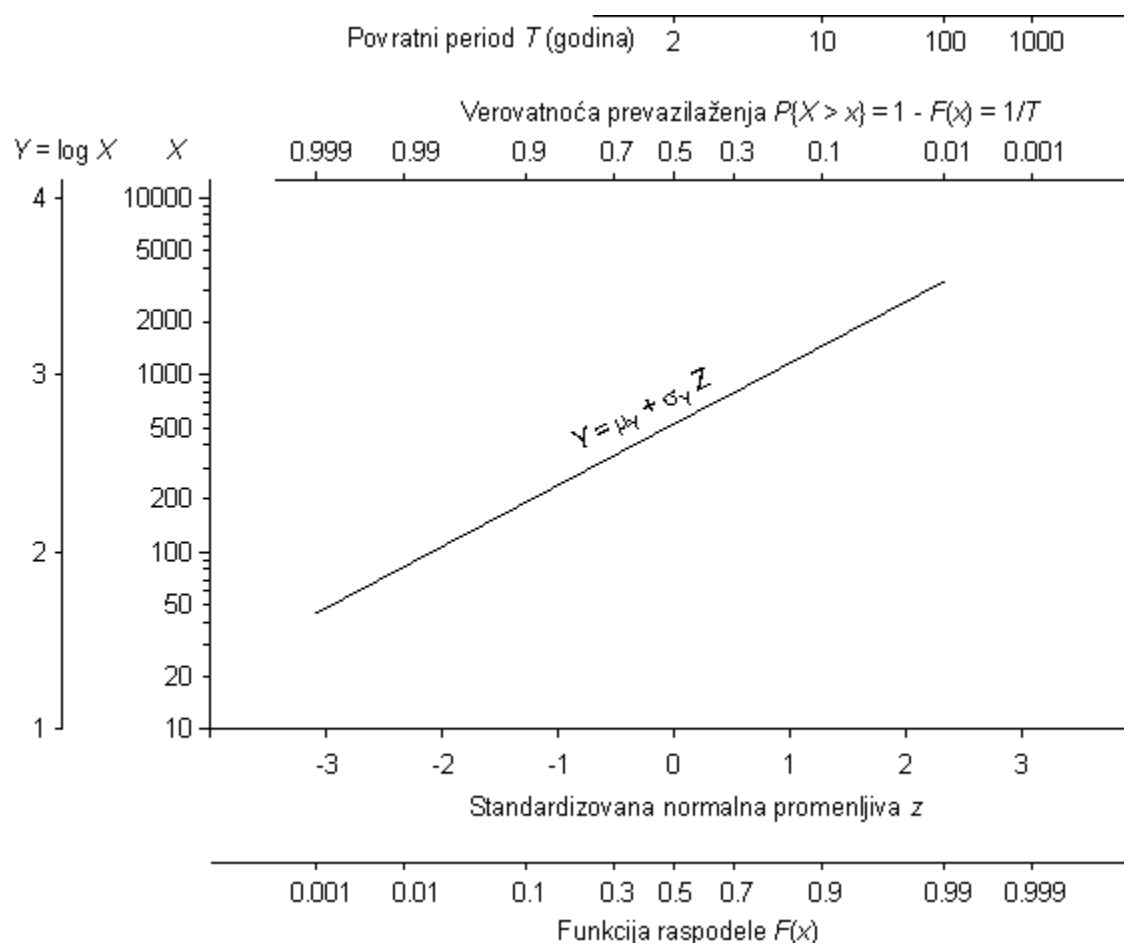
$$X = u + \alpha Y$$

gde je  $Y$  standardizovana Gumbelova promenljiva, a  $u$  i  $\alpha$  parametri Gumbelove raspodele za promenljivu  $X$ . Primer dijagrama Gumbelove verovatnoće je prikazan na slici 2, gde se može uočiti da se on razlikuje od dijagrama normalne verovatnoće po tome što nije simetričan oko vrednosti  $F(x) = 0.5$ , već su vrednosti  $F(x) > 0.5$  razvučene. Zbog toga je dijagram Gumbelove verovatnoće pogodan za prikaz raspodela maksimuma.



Slika 2. Papir Gumbelove raspodele.

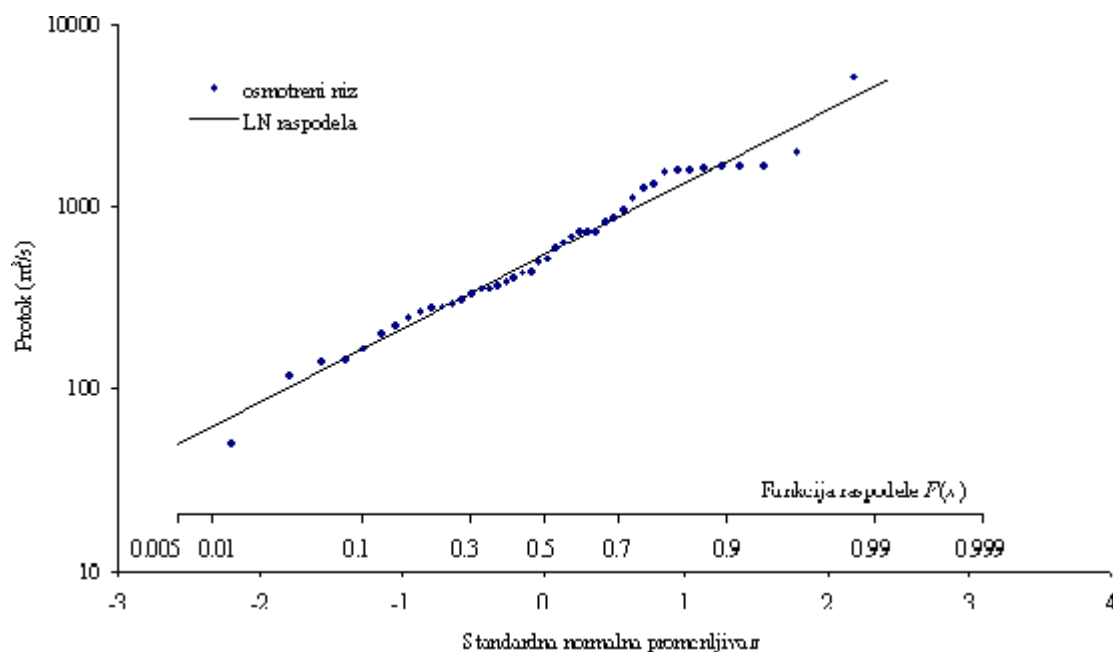
Od dijagrama normalne verovatnoće može se konstruisati i dijagram log-normalne verovatnoće ukoliko se vrednosti slučajne promenljive  $X$  nanesu u logaritamskoj razmeri. Na takvom dijagramu log-normalna raspodela se prikazuje kao prava linija (slika 3).



Slika 3. Dijagram log-normalne verovatnoće.

Za raspodelu Pirson III ne može se konstruisati dijagram verovatnoće, s obzirom da ova raspodela ima tri parametra i ne postoji standardizovana promenljiva koja je u linearnoj vezi sa originalnom slučajnom promenljivom. Ova raspodela se najčešće prikazuje na dijagramu normalne verovatnoće. Pošto je poznato da se Pirson III raspodela svodi na normalnu ukoliko je koeficijent asimetrije  $C_s$  jednak nuli, odstupanje Pirson III raspodele od prave linije na papiru normalne verovatnoće ukazaće na stepen asimetričnosti ove raspodele.

Na dijagramima verovatnoće normalne ili Gumbelove raspodele mogu se crtati i druge teorijske funkcije raspodele, ali se one tada neće prikazati kao prave linije. Pored teorijskih raspodela, na dijagrame verovatnoće nanosi se i empirijska raspodela razmatranog niza (uz pomoć parova vrednosti slučajne promenljive i odgovarajućih kompromisnih verovatnoća). Ukoliko se tačke empirijske raspodele na dijagramu verovatnoće rasporede oko neke prave linije, to je znak da se razmatrani niz može prilagoditi raspodelom čiji je to dijagram verovatnoće. Na slici 4 prikazan je primer niza koji se dobro prilagođava log-normalnoj raspodeli, jer empirijska raspodela približno prati pravu liniju na papiru log-normalne raspodele.



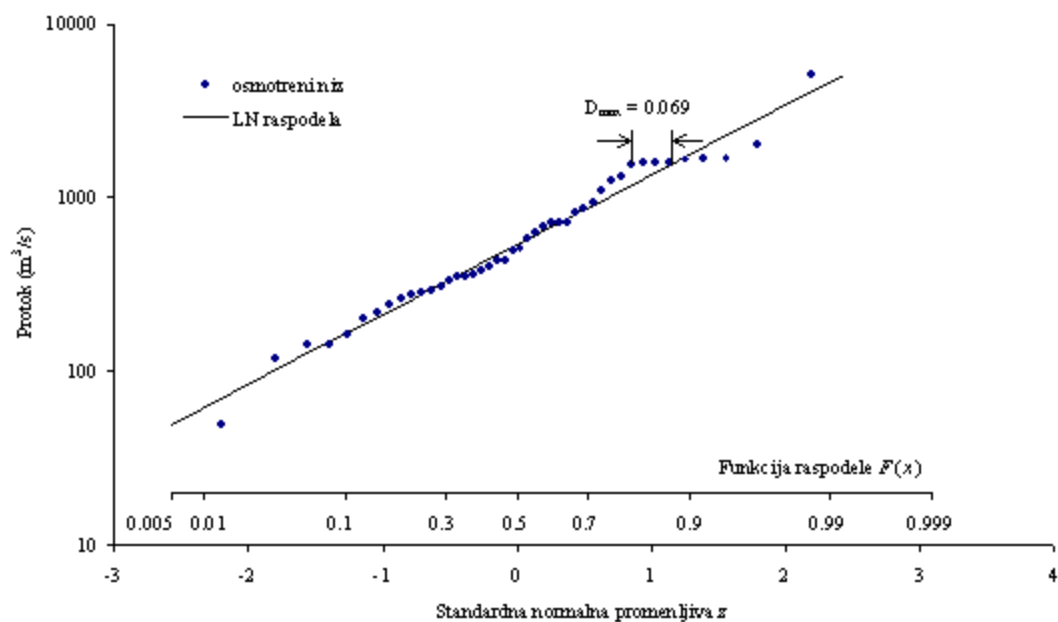
Slika 4. Primer niza koji se dobro prilagođava log-normalnoj raspodeli.

**Test Kolmogorov-Smirnova.** Kao mera odstupanja empirijske i teorijske raspodele, u ovom testu se koristi statistika

$$D_{\max} = \max_x |F_e(x) - F_t(x)|$$

gde su  $F_e(x)$  i  $F_t(x)$  empirijska i teorijska funkcija raspodele. Ova statistika predstavlja maksimalno apsolutno odstupanje empirijske i teorijske raspodele od svih članova uzorka. Ova statistika se poredi sa nekom kritičnom vrednošću  $D_{kr}$  kako bi se ustanovilo da li je odstupanje dovoljno malo. Kritična vrednost  $D_{kr}$  će zavisiti od praga značajnosti  $\alpha$  i od obima uzorka  $N$ , s obzirom da empirijska raspodela zavisi od obima uzorka. Tabela kritičnih vrednosti po testu Kolmogorov-Smirnova u zavisnosti od praga značajnosti i obima uzorka data je u tablicama.

Na slici 5 prikazan je primer određivanja statistike  $D_{\max}$  grafičkim putem.



Slika 5. Primer određivanja maksimalnog odstupanja teorijske i empirijske raspodele niza.