

ТЕРМИКА

Термичко ширење

Сва тела (сем воде) се шире при загревању (вода се скупља кад се греје од 0° до 4°). Разлог за ово је повећање средње удаљености између вибрирајућих молекула. Наиме, порастом температуре расте средња кинетичка енергија молекула па се они више међусобно удаљавају у пољу привлачних сила хемијских веза које их држе на окупу. Ово повећање посматрано на макро нивоу представља бубрење (или повећање линеарних димензија тела). Експериментално је утврђено да ово повећање зависи од природе материјала, степена загревања и димензија тела пре загревања.

Сем ширења, загревање може да промени и еластична својства материјала:

нпр. Челик на 768°C , па затим на 911°C итд, мења просторни распоред атома тј. тип кристалне решетке (челик је поликристални материјал). Ова промена изазива драстично смањење Јунговог модула еластичности и модула торзије.

Линеарно ширење шипке

Ако температурски интервал загревања није исувише велики (стотинак степени) експериментално је утврђена линеарна зависност димензија од степена загрејаности.

Шипка дужине l_0 на 0°C загрејана до температуре t има дужину:

$$l(t) = l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t),$$

$\alpha \left[\frac{1}{^\circ\text{C}} \right]$ - линеарни коефицијент термичког ширења.

За већину конструктивних материјала α има вредност од $10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$ до $10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$. Дакле, има малу вредност.

Челик и бетон имају исту вредност α .

Термичко ширење плоче

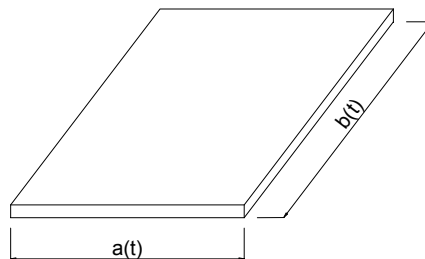
$$S(t) = a(t) \cdot b(t) = a_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t) \cdot b_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t)$$

$$S(t) = a_0 \cdot b_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t)^2 = S_0 (1 + 2\alpha t + \alpha^2 t^2)$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 t^2 &<< 1 \\ \alpha^2 t^2 &<< 2\alpha t \end{aligned} \Rightarrow$$

$\alpha^2 t^2$ може да се занемари у односу на 1 и $2\alpha t$ па важи формула:

$$\boxed{S(t) = S_0 (1 + 2\alpha t)}$$



Термичко ширење паралелопипеда

$$V(t) = a(t) \cdot b(t) \cdot c(t) = a_0(1 + \alpha t) \cdot b_0(1 + \alpha t) \cdot c_0(1 + \alpha t)$$

$$V(t) = a_0 b_0 c_0 (1 + \alpha t)^3$$

$$V(t) = V_0(1 + 3\alpha t + 3\alpha^2 t^2 + \alpha^3 t^3)$$

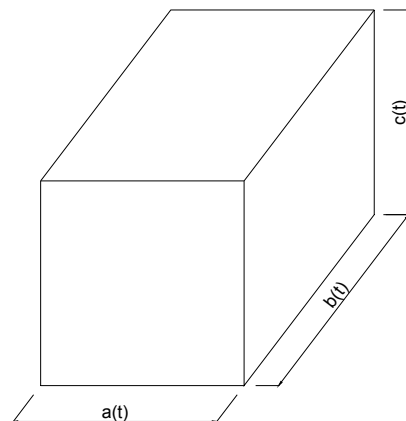
$$3\alpha^2 t^2 \ll 1$$

$$3\alpha^2 t^2 \ll 3\alpha t$$

 \Rightarrow

$$\alpha^3 t^3 \ll 1$$

$$\alpha^3 t^3 \ll 3\alpha t$$

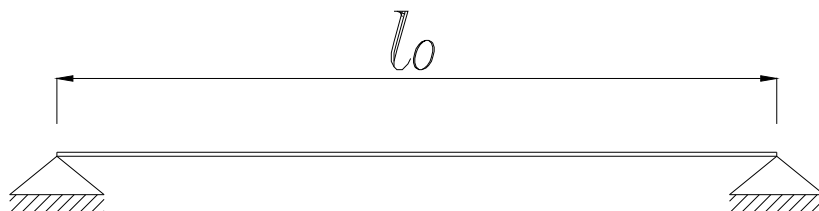


$3\alpha^2 t^2$ и $\alpha^3 t^3$ можемо занемарити у односу на 1 и $3\alpha t$, па важи формула:

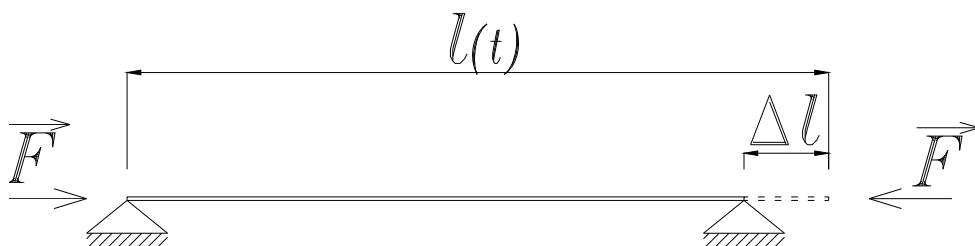
$$V(t) = V_0(1 + 3\alpha t)$$

Термичко напрезање материјала

Посматрамо греду дужине l_0 укљештену непомичним ослоњцима као на слици:



Изводимо израз за силу напрезања у шипци када се она загреје од температуре 0°C до температуре t . l_0 је дужина шипке на 0°C . Услед загревања шипка не може да се издужи због чега у њој настаје напон, тј. пораст одбојне силе између молекула материјала.



$$l(t) = l_0(1 + \alpha t)$$

$$l(t) - l_0 = l_0 \alpha t$$

$$\Delta l = l_0 \alpha t$$

\vec{F} је екстерна сила којом ову шипку савијамо на почетну дужину. Интерна термичка сила је супротног смера.

Дакле имамо: $\Delta l = l_0 \alpha t$, сада примењујемо Хуков закон: $\sigma = E_y \frac{\Delta l}{l_0}$

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{S} = E_y \frac{\Delta l}{l_0} \quad \Rightarrow \quad F = SE_y \frac{l_0 \alpha t}{l_0}$$

Коначно имамо: $F = SE_y \alpha t$

Реални гасови

Идеални гасови при ниским температурама и високим притисцима ће се понашати као реални гасови. То подразумева да молекули нису материјалне тачке и да им судари нису еластични (енергија кретања пре судара се трансформише у друге видове: светлосну, хемијску,...) да након судара молекули формирају гроздове (кластере) што представља кондензовање гаса у пару.

Кондензати молекула H_2O у ваздуху су магла, роса и киша.

Кондензати молекула су последица Ван дер Валсове силе (*Van der Waals*). Наиме, атоми нису потпуно електрично неутрални. У времену они се понашају као флукутирајући диполи (у екстремно кратким интервалима су позитивно или негативно наелектрисани). Када се нађу близу, овај ефекат се појачава (дуже бивају наелектрисани) и јавља се искључиво привлачна сила која формира гроздове атома (или молекула). Ово важи за све атоме у природи (тј. да теже да се залепе један на другог). Интезитет ових сила је врло мали и оне делују само на малим растојањима од атома, а њихов ефекат деловања је видљив само на ниским температурама јер се тада атоми крећу спорије, судари су им блажи, трају дуже па ова сила може да задржи атоме после судара заједно.

Виши притисак у гасу потпомаже овај процес, јер је број судара у гасу тада већи, а тиме и вероватноћа да након њих (судара) настане кластер (грозд).

Ван дер Валсова сила је електричне природе (електромагнетна сила, сила између наелектрисаних честица)

Сада изводимо Ван дер Валсову једначину реалног гаса. Полазимо од једначине идеалног гаса:

$$p_{id} \cdot V = n_m RT, \text{ где је } n_m \text{ број молова гаса.}$$

Коригујемо запремину V запремином свих молекула у гасу коју обележавамо са b . Наиме, у теорији идеалног гаса молекули су били тачка, дакле за кретање молекула на располагању је запремина $V - b$. Такође, притисак идеалног гаса је различит од оног који меримо код реалних гасова. Реалан притисак је нижи од идеалног управо због привлачних сила између атома. Притисак настаје ударима атома у зидове суда. Атом

који удара у зид се може сматрати као онај који се издваја из целине гаса па на њега делује привлачна сила која тежи да га врати назад, тј. успорава га на путу ка зиду, чиме његов удар чини блажим, а притисак нижим. Показује се да је ублажење удара сразмерно квадрату концентрације молекула, а обрнуто сразмерно запремини гаса, тј.:

$$p_{real} = p_{id} - a \cdot \frac{n^2}{v^2} \quad (\text{одавде закључујемо да је и } a \cdot \frac{n^2}{v^2} \text{ притисак})$$

n – концентрација $\left[\frac{\text{broj molekula}}{m^3} \right]$,

v – специфична запремина гаса $\left[\frac{m^3}{kg} \right]$,

a – позитивна физичка константа

Уношењем корекција, једначина постаје:

$$\left(p_{real} + a \frac{n^2}{v^2} \right) (V - b_1) = n_m RT \quad \bigg/ : n_m$$

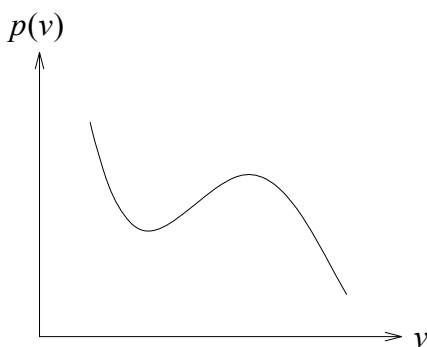
$$\left(p + a \frac{n^2}{v^2} \right) \left(\frac{V}{n_m} - \frac{b_1}{n_m} \right) = RT$$

$$\left(p + a \frac{n^2}{v^2} \right) (v - b) = RT \quad - \text{Ван дер Валсова једначина}$$

a и b су константе које ћемо одредити преко критичног стања гаса.

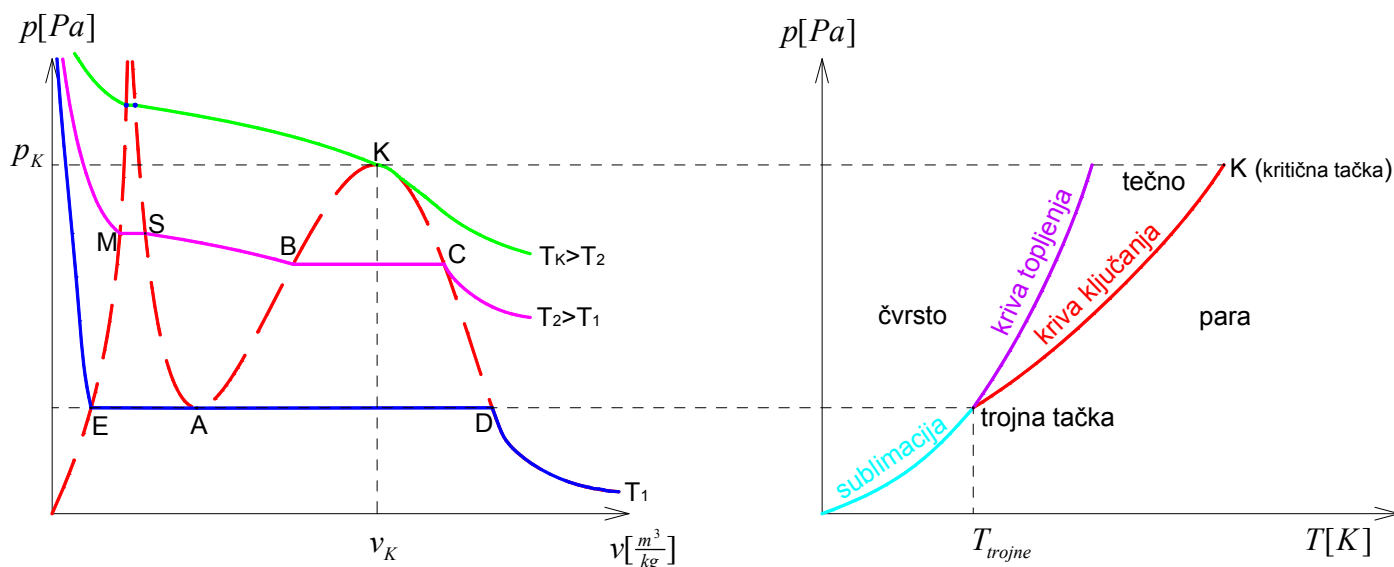
Често једначину пишемо и у облику:

$$p(v) = \frac{RT}{v - b} - \frac{an^2}{v^2}$$



Ендрјусове криве стања паре чисте супстанце

(Thomas Andrews, 1813-1885)



На сликама су дијаграми зависности притиска чисте супстанце у функцији чисте запремине (v) и температуре (T).

v је запремина једног килограма супстанце на притиску p и температури T .

Испрекидана крива Е-М је граница између чврсте и течне фазе супстанце. Ако је стање супстанце на овој кривој – почиње топљење (тачка М – *melting*). Из чврсте фазе у ову тачку, ако је $T = const$, долазимо повећањем специфичне запремине v , тј. смањењем спољашњег притиска (када смањујемо спољашњи притисак тела бубре). Док се супстанца топи температура јој је константна (и притисак је константан) све до тачке S у којој је дошло до потпуног топљења. Дакле, од M до S имамо топљење, при чему не долази до загревања (доведена топлота се троши на раскидање хемијских веза у чврстом стању).

Гледано у контра смеру (од S ка M), овај део изотерме представља очвршћавање (отуда ознака S – *solidification*). Стање супстанце на сегменту $M - S$ је смеша чврстог и течног агрегатног стања на истом притиску и температури. (Са графика видимо да температура топљења зависи од притиска!)

Тачка M је изнад тачке E , што значи да се почетак топљења при вишим температурама топљењадешава при вишем притиску. Ако је притисак врло мали, и температура топљења је врло мала (види тачку E). Генерално, сваку фазну трансформацију прати константан притисак и температура, а утрошена или ослобођена топлота иду на раскидање (формирање) хемијске везе.

Сада посматрамо сегмент $S - B$, који представља течност при константној температури, чије стање мењамо на начин да она прокључа (обарамо притисак). У тачки B почиње

кључање (*boiling*); чим оно почне, притисак p остаје константан, садржај паре расте и идемо удесно до тачке C . Топлота се троши на раскидање веза између молекула течности. Гледано с' десна тачка C је почетак кондензовања паре ($C - \text{condensation}$).

У овој тачки стање супстанце се назива засићена пара. Када је пара засићена почиње да се кондензује, стварају се кластери молекула. Десно од C обарањем притиска добијамо обичну пару. Често се назива и прегрејана пара, што указује да је далеко од тачке кондензовања (сувише је вруће да се кондензује). Опет видимо да температура кључања зависи од притиска! Тачка B на вишем притиску од A . При нормалном притиску H_2O кључа на 100°C , али може да кључа и на 0°C ако је довољно низак притисак.

Испрекидана крива $A - B - K$ се назива крива кључања, а $K - C - D$ је крива засићене паре. Најнижа изотерма на слици (T_1), тачније, дуж $E - A - D$ је опис стања супстанце при екстремно ниским притисцима и температурама. У тачки E не почиње топљење већ сублимација (испаривање чврстог тела). Дакле, не постоји течна фаза, нпр графит се ни под којим условима не може истопити, он увек сублимира.

Посебно је занимљива изотерма на тзв. критичној температури T_K . Она додирује десни део Ендрјусове криве у тачки K . Супстанца у овој тачки је у тзв. критичном стању. То значи да ако јој се врло мало повећа запремина она комплетно у истом трену прелази из течног у парну фазу и обрнуто (ако се смањи температура). Нпр: води можемо да одлажемо кључање до преко 300°C повећањем спољашњег притиска. Ово је технолошки врло важно када је кључање вреле воде непожељно (нпр у систему централног грејања).

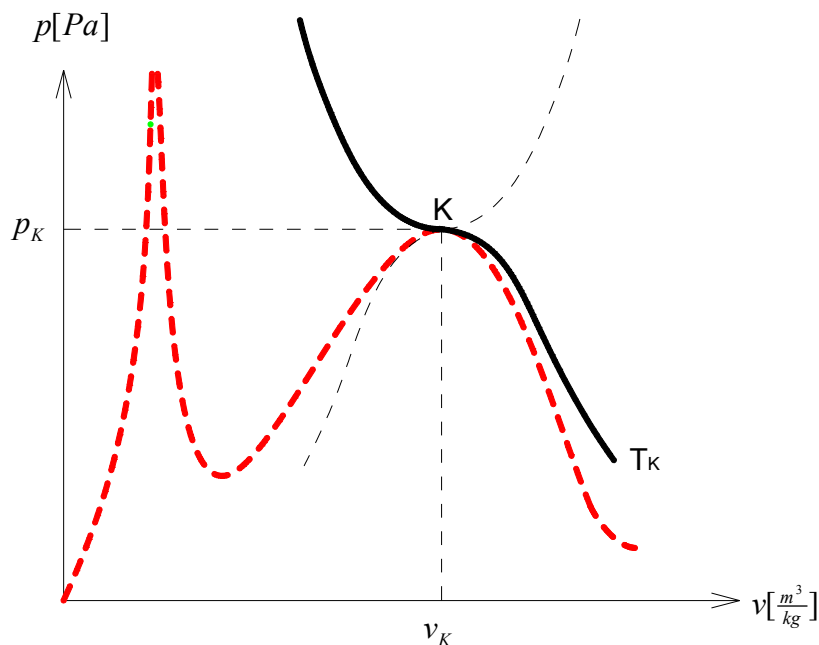
Описујемо $P - T$ дијаграм.

То је дијаграм исте супстанце, али је дијаграм зависности P од T . Лако разликујемо агрегатна стања супстанце, а најзанимљивија је **тројна тачка**, тј. физичко стање у коме егзистирају три фазе у исто време: чврсто, течност и гасовито. Нпр имамо смешу леда, воде и водене паре. На истој температури и притиску ове три фазе спонтано егзистирају у времену: колико се леда отопи, толико се воде заледи; колико воде испари, толико се паре кондензује; итд. Наравно, нема размене топлоте са околином. На овај начин дефинишемо 0° у Целзијусовој скали, јер је температура у тројној тачки константна (не мења се). (Покушај да загрејемо ову смешу пропада јер се лед топи и троши топлоту.)

Одређивање коефицијената a и b у Ван дер Валсовој једначини стања паре

$$p(v) = \frac{RT}{v-b} - a \frac{n^2}{v^2}$$

Одређују се експериментално, познавањем притиска, температуре и специфичне запремине у критичној тачки супстанце.



Видимо да изотерма T_K тангира испрекидану криву и да је други извод изотерме у тачки K једнак нули (превојна тачка). Испрекидани део графика представља Ван дер Валсову једначину стања, па у тачки K има први извод једнак нули.

Дакле, у тачки K је:

$$\frac{dp(v)}{dv} = 0$$

$$\frac{dp^2(v)}{dv^2} = 0$$

$$\frac{dp}{dv} = \frac{d}{dv} (RT(v-b)^{-1} - an^2v^{-2}) = RT(-1)(v-b)^{-2} - (-2)an^2v^{-3} = 2an^2v^{-3} - RT(v-b)^{-2} = 0$$

\Rightarrow

$$\boxed{\frac{2an^2}{v^3} = \frac{RT}{(v-b)^2}} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{d^2p}{dv^2} = \frac{d}{dv} (2an^2v^{-3} - RT(v-b)^{-2}) = -6an^2v^{-4} + 2RT(v-b)^{-3} = 0$$

\Rightarrow

$$\boxed{\frac{6an^2}{v^4} = \frac{2RT}{(v-b)^3}} \dots\dots\dots (2)$$

$$(1)/(2): \quad \frac{\frac{2an^2}{v^3}}{\frac{6an^2}{v^4}} = \frac{\frac{RT}{(v-b)^2}}{\frac{2RT}{(v-b)^3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{3} = \frac{v-b}{2} \quad \Rightarrow \quad 3v-3b=2v \quad \Rightarrow \quad v=3b$$

$$\Rightarrow \quad b = \frac{v}{3} \rightarrow \boxed{b = \frac{v_K}{3}}$$

Пошто су изводи израчунати у тачки K имамо да је $b = \frac{v_K}{3}$, v_K – специфична запремина супстанце у критичној тачки.

Константу a добијамо заменом b у једначину (1):

$$a = \frac{RT_K v_K^3}{2n^2 (v_K - b)^2}$$

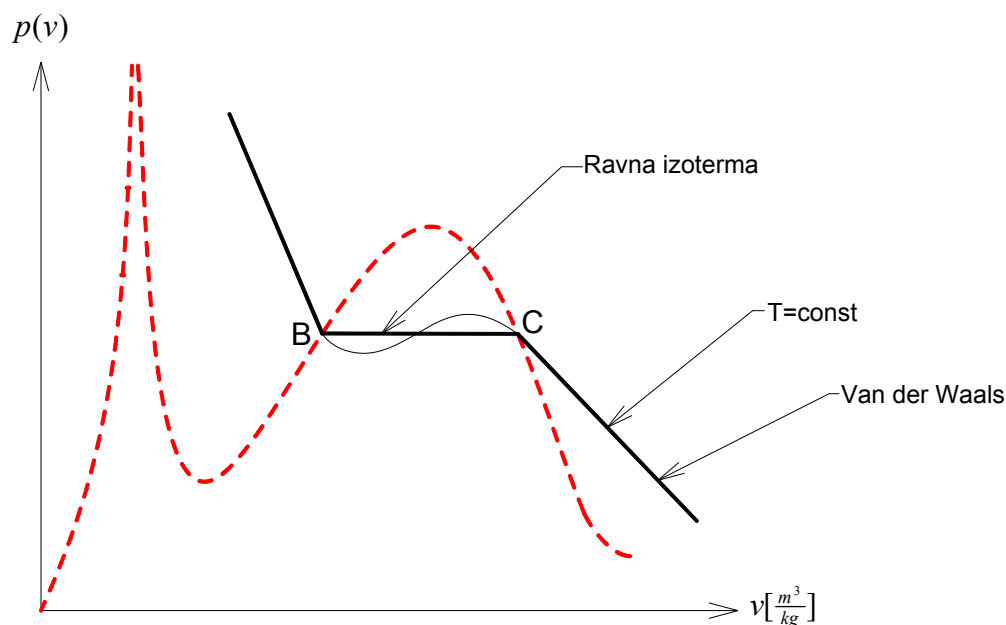
$$a = \frac{RT_K v_K^3}{2n^2 (v_K - \frac{v_K}{3})^2} = \frac{RT_K v_K^3}{2n^2 \frac{4}{9} v_K^2} = \frac{9RT_K v_K}{8n^2}$$

$$\boxed{a = \frac{9}{8} \cdot \frac{RT_K v_K}{n^2}}$$

Сада, Ван дер Валсова једначина гласи:

$$p(v) = \frac{RT}{v - \frac{v_K}{3}} - \frac{9}{8} \cdot \frac{RT_K v_K}{n^2} \cdot \frac{n^2}{v^2}$$

$$\boxed{p(v) = \frac{3RT}{3v - v_K} - \frac{9}{8} \cdot \frac{RT_K v_K}{v^2}}$$



Латентне топлоте

латентно – скривено

То су топлоте које се доводе (одводе) при фазној трансформацији супстанце тј, при топљењу и испаравању (очвршћавању и кондензовању).

Оне се троше на раскидање хемијских веза и не доприносе порасту температуре.

Специфична топлота топљења

Топлота потребна да један килограм супстанце на нормалном притиску (1013 mb) и температури топљења преведе из чврстог у течно стање.

Јединица је Џул по килограму $[\frac{J}{kg}]$.

Специфична топлота очвршћавања

Топлота која се доведе при нормалном притиску једном килограму супстанце на температури очвршћавања, да би она (супстанца) прешла из течне у чврсту фазу.

Специфична топлота испаравања

Топлота коју треба довести једном килограму кључале течности на нормалном притиску да пређе у пару на истој температури.

Специфична топлота кондензовања

Топлота која се ослободи на нормалном притиску на температури кондензовања од стране једног килограма паре при преласку из парне у течну фазу.

Латентне температуре топљења и очвршћавања су исте.

Латентне топлоте испаравања и кондензовања су такође (међусобно) исте.

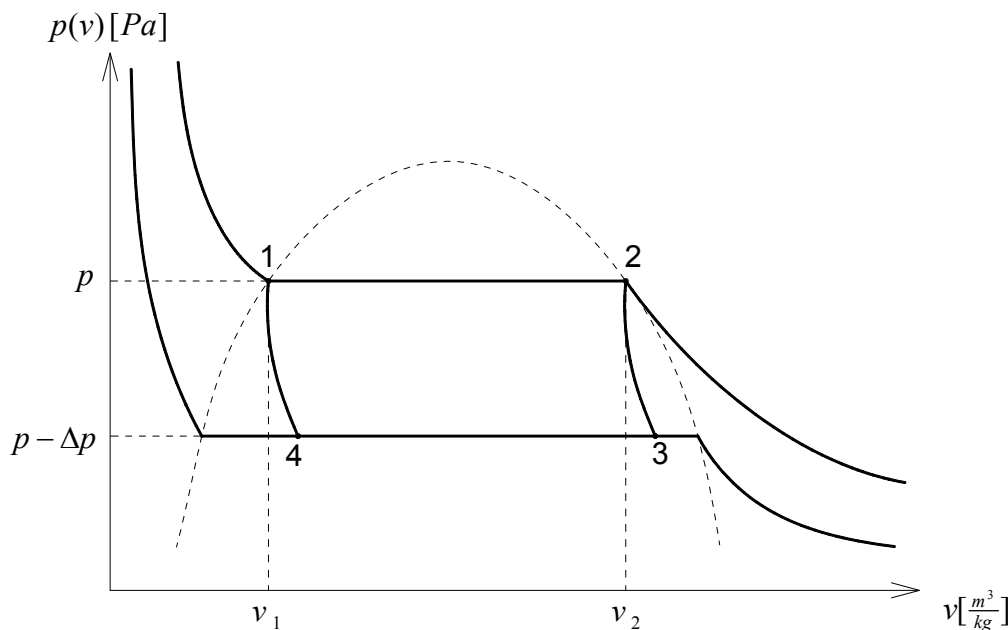
Клаузијус - Клапејронова једначина

Ова једначина описује везу између притиска и температуре за смеше чисте супстанце које се састоје од две агрегатне фазе: чврсте и течне. Конкретно, то је једначина која описује криву топљења $E - M$ са графика Ендрјусових кривих (у једној од претходних лекција).

Претпостављамо да су агрегатне фазе у термодинамичкој равнотежи. Такође могу се описивати и смеше паре или течности, тј. крива $A - B - K$.

У овој лекцији анализирамо смешу кључале течности и њене паре.

Уочавамо две блиске изотерме са разликом температура ΔT .



У тачки 1 течност кључа, доводимо јој Q_1 топлоте услед чега прелази у тачку 2 где је сва течност испарила. Адијабатском експанзијом смањујемо притисак паре за Δp , а температуру за ΔT . Супстанца је у тачки 3 и представља смешу доста паре и мало воде на температури кључања $T - \Delta T$. Компресијом и одвођењем топлоте Q_2 преводимо смешу у тачку 4 са пуно кључале воде и мало паре. Поновном компресијом адијабатски доводимо пару у тачку 1.

Овим смо описали један Карнов циклус чији коефицијент ефикасности износи

$$\eta = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1}.$$

Ако су притисци p и $p - \Delta p$ релативно мали онда пару можемо сматрати за идеалан гас, па израз за η апроксимирамо оним за идеалан гас: $\eta \approx \frac{T - (T - \Delta T)}{T} = \frac{\Delta T}{T}$.

Користан рад добијен из овог Карновог циклуса је: $A = \eta \cdot Q_1 = \frac{\Delta T}{T} Q_1$.

(η је по дефиницији ефикасности топлотне машине количник добијене енергије и уложене енергије: $\frac{A}{Q_1}$)

Са друге стране, ако апроксимирамо криволинијски трапез циклуса са правоугаоником, рад циклуса биће једнак његовој површини: $A \cong \Delta p \cdot (v_2 - v_1)$

\Rightarrow

$$\Delta p \cdot (v_2 - v_1) = \frac{\Delta T}{T} Q_1$$

$$\Delta p \cdot (v_2 - v_1) = \frac{\Delta T}{T} \cdot m \cdot q, \quad m - \text{маса супстанце; } q - \text{латентна топлота испаравања } \left[\frac{J}{kg}\right].$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{m \cdot q}{T(v_2 - v_1)}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{q}{T\left(\frac{v_2}{m} - \frac{v_1}{m}\right)}, \quad v_2 \left[\frac{m^3}{kg}\right]$$

Пара запрема на истом притиску много већу запремину од течности, па је $v_2 \gg v_1$ (у тачки 2 имамо само пару, а у тачки 1 само кључалу течност).

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{q}{T \frac{v}{m}}, \quad v_2 = v$$

Сада користимо једначину идеалног гаса: $pv = R_g T$; $v = \frac{V}{m}$; $R_g = \frac{R}{M}$ (R_g – гасна константа, R – универзална гасна константа, M – моларна маса паре – маса у килограмима једног мола гаса).

$$\Rightarrow \quad v = \frac{R_g T}{p}$$

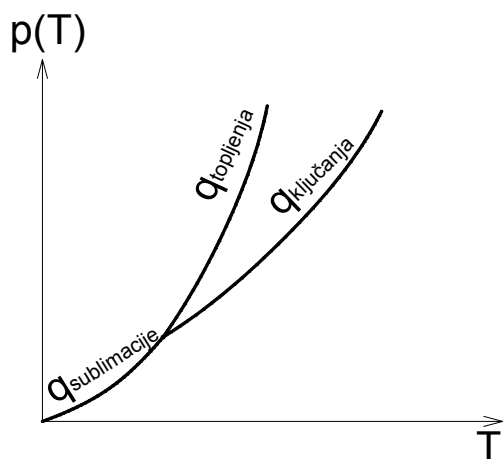
$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{q}{R_g T^2} \cdot p$$

$$\text{Коначно: } \frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{qM}{RT^2} \cdot p$$

Ако су бесконачно мале разлике притиска и температуре: $\Delta p \rightarrow dp$, $\Delta T \rightarrow dT$ добијамо Клаузијус – Клаперонову једначину:

$$\boxed{\frac{dp}{dT} = \frac{qM}{RT^2} \cdot p} \quad \text{M- моларна маса паре, R-универзална гасна константа (8.394 \frac{g}{mol})}$$

⇒ Клаузијус – Клаперонова једначина даје нагиб криве у PT дијаграму.



Са дијаграма видимо две гране од тројне тачке; једна се добија за $q = q_{topljenja}$, а друга за

$q = q_{kljudanja}$. Како нагиб ових кривих $\frac{dp}{dT}$ директно зависе од q , отуда две гране.

Сада решимо Клаузијусову једначину јер она представља диференцијалну једначину првог реда. Раздвајањем промењивих p и T налазимо:

$$\frac{dp}{p} = \frac{qM}{RT^2} dT$$

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \frac{qM}{R} \int_{T_0}^T T^{-2} dT$$

$$\ln p - \ln p_0 = \frac{qM}{R} \cdot \frac{T^{-1}}{-1} \Big|_{T_0}^T$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{qM}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)$$

$$e^{\ln \frac{p}{p_0}} = e^{\frac{qM}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)}$$

$$\frac{p}{p_0} = e^{\frac{qM}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)}$$

$$\boxed{p = p_0 \cdot e^{\frac{qM}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)}}$$

Транспорт топлоте

Температурско поље

Температурско поље је простор чијој свакој тачки смо доделили температуру. Математички, то је функција $t = t(x, y, z, \tau)$ где су x, y, z координате у простору, а τ време.

Ако зависи од времена оно је нестационарно, у супротном је стационарно.

Од физичког је интереса познавање правца и смера најбржег пораста температуре (посматрано) из неке тачке. Величина која ово описује се назива градијент температурског поља. То је вектор, а математички се дефинише као први извод функције поља по вектору дуж правца промене.

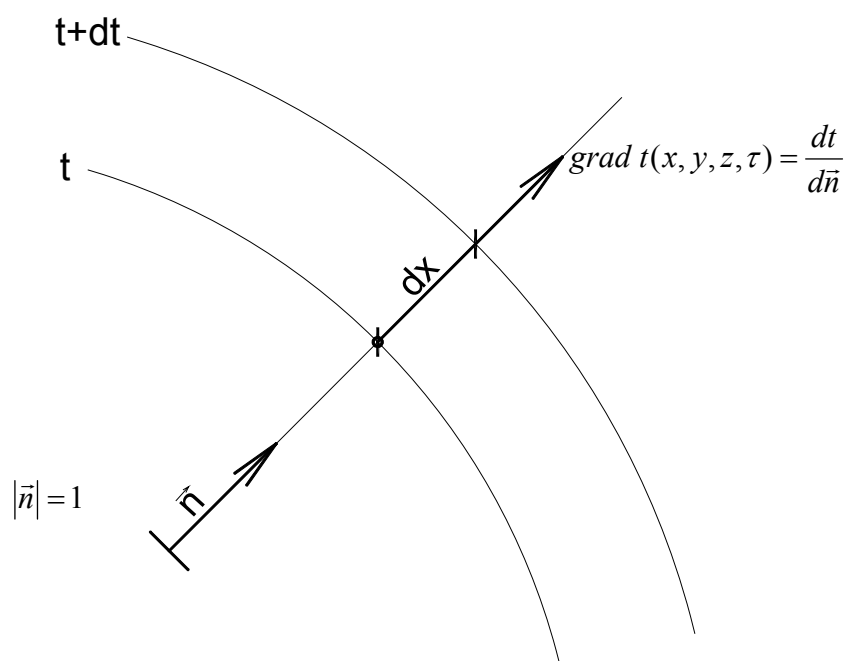
$$\text{Tj.: } |\text{grad } t(x, y, z, \tau)| = \frac{dt}{d\vec{n}}, \quad \vec{n} - \text{вектор правца}$$

Ако изаберемо правац дуж x осе градијент температурског поља биће:

$$|\text{grad } t(x, y, z, \tau)| = \frac{dt}{dx} \cdot \vec{i}, \quad \text{аналогно је и за друге правце.}$$

Физички то представља брзину промене температуре дуж x осе; Ако је извод негативан то значи да температура опада са порастом x координате.

На слици су приказане две изотермне површи чије се температуре разликују за бесконачно мали износ температуре dt , растојање између њих је бесконачно мало dx .



Градијент је вектор који је нормалан на изотермну површ у тачки у којој се одређује.

Фуријеов закон провођења топлоте

Fourier

Фурије је експериментално открио закон провођења топлоте кроз чврсто тело. Проведена топлота Q је сразмерна разлици температура између тачки између којих се проводи топлота Δt , површини S кроз коју пролази топлота, времену провођења τ и термичких карактеристика материјала описаних коефицијентом топлотног провођења λ , а обрнуто сразмерна дебљини зида или растојању тачака провођења Δx .

$$Q = \frac{\lambda \cdot S \cdot \Delta t \cdot \tau}{\Delta x} [J], \quad \Delta t [^{\circ}C]$$

Коефицијент λ зависи од темпеартуре, али за мале температурске промене сматрамо да је константа.

Ако бисмо посматрали бесконачно танак раван зид дебљине dx , онда би и разлика температура његових површина била бесконачно мала dt , па би Фуријеов закон за овај случај гласио:

$$Q = \lambda S \tau \frac{dt}{dx} \Rightarrow \boxed{Q = \lambda S \tau \cdot \text{grad } t(x)} \text{ - ово је општи облик Фуријеовог закона.}$$

Сада дефинишимо величине којима карактеришемо одређене материјале_

$$1. \text{ Топлотни флуks: } \Phi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q}{\tau} = \lambda S \frac{dt}{dx} \left[\frac{J}{s} = W \right]$$

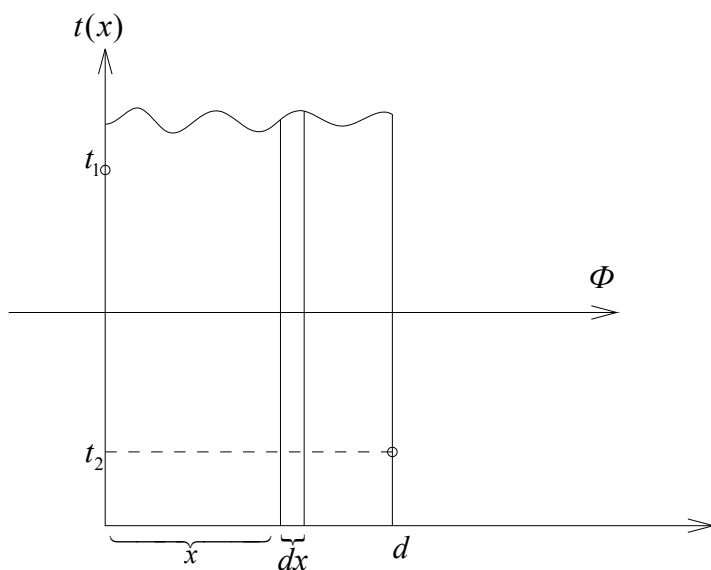
-брзина одласка (протицаја) топлоте.

$$2. \text{ Густина флуksа: } q = \frac{\Phi}{S} = \lambda \frac{dt}{dx} \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

-густина флуksа не зависи од површине зида и времена

Топлота струји од тачке више температуре ка тачки ниже. Δt за овај случај је мањи од нуле (промена у физици се рачуна као крајња вредност минус почетна). Зато је градијент температуре негативан па се у Фуријеов закон вештачки додаје минус (-) да би флуксеви били позитивни, тј.:

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi &= -\lambda S \frac{dt}{dx} \\ q &= -\lambda \frac{dt}{dx} \end{aligned}}$$

Провођење топлоте кроз раван хомоген зид

Посматрамо хомоген зид дебљине d , коефицијента проводности λ са познатим температурама површина t_1 и t_2 . Анализирамо стационаран случај, тј. температуре у свакој тачки зида се не мењају у времену. Изводимо температурско поље у зиду и одређујемо густину флукса полазећи од Фуријеовог закона. Флукс је константан јер су и температуре константне.

$$\Phi = \text{const}$$

$$q = \frac{\Phi}{S} = -\lambda \frac{dt}{dx} \quad \bigg/ \cdot dx$$

$$q \cdot dx = -\lambda \cdot dt$$

$$q \int_0^x dx = -\lambda \int_{t_1}^{t(x)} dt$$

$$q(x - 0) = -\lambda(t(x) - t_1)$$

$$\boxed{q \cdot x = -\lambda(t(x) - t_1)} \dots\dots\dots (1)$$

Одређујемо q на основу запажања: $x = d$; $t(x = d) = t_2$:

$$q \cdot d = -\lambda(t(d) - t_1)$$

$$q \cdot d = -\lambda(t_2 - t_1)$$

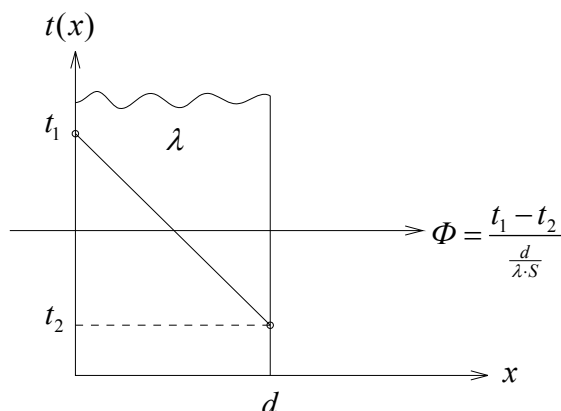
$$q = -\frac{\lambda}{d}(t_2 - t_1)$$

$$\boxed{q = \frac{t_1 - t_2}{\frac{d}{\lambda}}} \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

$$(1) \Rightarrow t(x) = t_1 - \frac{q}{\lambda} x$$

$$\boxed{t(x) = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{d} x} \text{ -температурско поље}$$

Дакле, температура се мења линеарно кроз зид.



Топлотни флуks: $\boxed{\Phi = q \cdot S = \frac{t_1 - t_2}{\frac{d}{\lambda \cdot S}}}$

Величина $\frac{d}{\lambda \cdot S}$ се може тумачити као *отпор провођењу топлоте* јер Флуks је обрнуто сразмеран њему.

Конкретно, величина $\frac{d}{\lambda}$ се дефинише као термички отпор провођења зида (за раван зид).

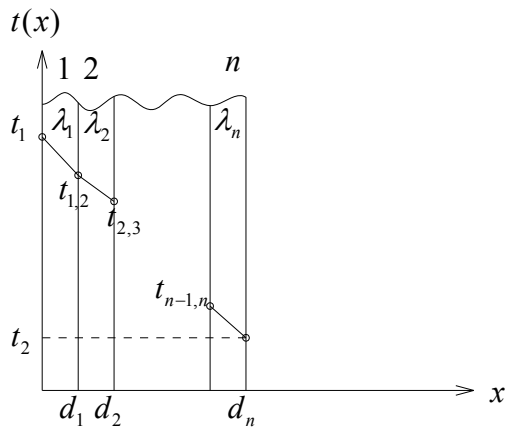
$$\boxed{R_t = \frac{d}{\lambda}} \text{ Термички отпор провођења зида } \Rightarrow \boxed{q = \frac{\Delta t}{R_t}}$$

Вишеслојни раван зид

Ако је зид нехомоген, тј. састоји се од више равних слојева различитих материјала, на сваки од слојева примењујемо резултат из претходне лекције и на крају изводимо Густину флуksа и температурско поље у зиду.

Претпостављамо да су познати коефицијенти провођења λ_i и температуре спољашњих површина зида t_1 и t_2 , као и дебљине појединих слојева.

Узећемо најопштији случај: зид има n слојева.



Температуре између слојева су: $t_{1,2}$, $t_{2,3}$, ..., $t_{n-1,n}$.

За први слој густина флукса: $q = \frac{t_1 - t_{12}}{\frac{d_1}{\lambda_1}}$;

за други: $q = \frac{t_{12} - t_{23}}{\frac{d_2}{\lambda_2}}$;

.....

За последњи: $q = \frac{t_{n-1,n} - t_2}{\frac{d_n}{\lambda_n}}$ (1)

Густине флукса q су исте јер је температурско поље стационарно. Наиме, ако би Флукс кроз претходни слој био већи од оног у наредном дошло би до пораста температуре на слоју јер више топлоте дотиче него што отиче од њега.

$$(1) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 - t_{12} = q \frac{d_1}{\lambda_1} \\ t_{12} - t_{23} = q \frac{d_2}{\lambda_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ t_{n-1} - t_2 = q \frac{d_n}{\lambda_n} \end{array} \right\} \text{sum.}$$

Сумирањем леве и десне стране налазимо:

$$t_1 - t_2 = q \left[\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{d_n}{\lambda_n} \right] \Rightarrow$$

$$q = \frac{t_1 - t_2}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i}}$$

Температурско поље у сваком слоју можемо одредити преко линеарног закона за један слој уносећи температуре на контакту суседних слојева. Њих одређујемо такође из линеарног закона.

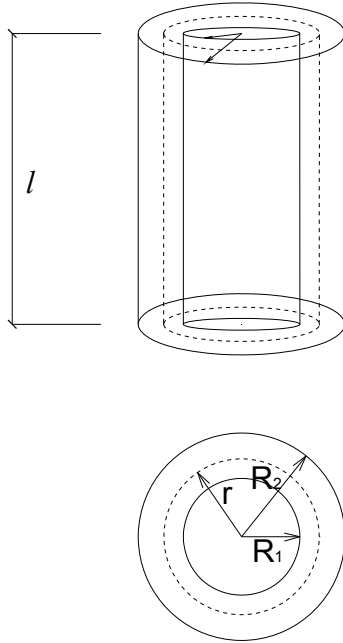
$$t(x) = t_1 - \frac{t_1 - t_{12}}{d_1} \cdot x \quad \text{линеарни закон за први слој}$$

Из $q = \frac{t_1 - t_{12}}{\frac{d_1}{\lambda_1}}$ нађемо t_{12} и убацимо у претходну једначину.

$$\left. \begin{aligned} t_{12} &= t_1 - q \frac{d_1}{\lambda_1} \\ t_{12} &= t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i}} \cdot \frac{d_1}{\lambda_1} \\ t_{23} &= t_{12} - \frac{t_1 - t_2}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i}} \cdot \frac{d_2}{\lambda_2} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \text{температура на споју између два слоја.}$$

Провођење топлоте кроз цилиндричан зид

Дат је цилиндричан зид од хомогеног материјала коефицијента топлотне проводљивости λ , дебљине $R_2 - R_1$ са температурама површина t_1 и t_2 . Анализирамо стационарно (временски непромењиво) провођење топлоте.



Уочимо коаксијалну површ унутар зида полупречника r . Флукс кроз ову површ је временски константна и износи:

$$\Phi = q \cdot S = -\lambda \frac{dt}{dr} \cdot 2\pi r l = \text{const}$$

Раздвајањем промењивих добијамо:

$$\frac{dr}{r} = -\frac{2\pi l \lambda}{\Phi} dt$$

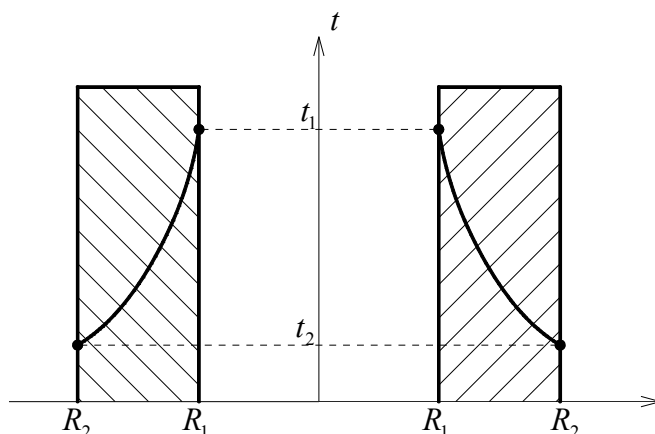
$$\int_{R_1}^r \frac{dr}{r} = -\frac{2\pi l \lambda}{\Phi} \cdot \int_{t_1}^{t(r)} dt$$

$$\ln r - \ln R_1 = -\frac{2\pi l \lambda}{\Phi} (t(r) - t_1)$$

$$\ln \frac{r}{R_1} = \frac{2\pi l \lambda}{\Phi} (t_1 - t(r))$$

$$t(r) = t_1 - \frac{\Phi}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r}{R_1}$$

Видимо да се температура мења по логаритамском закону.



Топлотни флукс Φ можемо да одредимо јер знамо температуру спољашње површине зида:

$$t(r = R_2) = t_2 = t_1 - \frac{\Phi}{2\pi l \lambda} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad \Rightarrow$$

$$\Phi = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi l \lambda} \ln \frac{R_2}{R_1}} \quad [W = \frac{J}{s}]$$

Уводимо појам подужне густине топлотног флукса да би добили израз за густину флукса по једном метру дужине зида:

$$q' = \frac{\Phi}{l} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi \lambda} \ln \frac{R_2}{R_1}} \quad [\frac{W}{m}]$$

Овај израз даје колико цилиндричан зид (цев) губи топлоте у једном секунду на једном метру дужине цеви.

Величина у имениоцу представља термички отпор провођења топлоте једног метра зида. Већу отпорност имају дебљи зидови од материјала мале топлотне проводности.

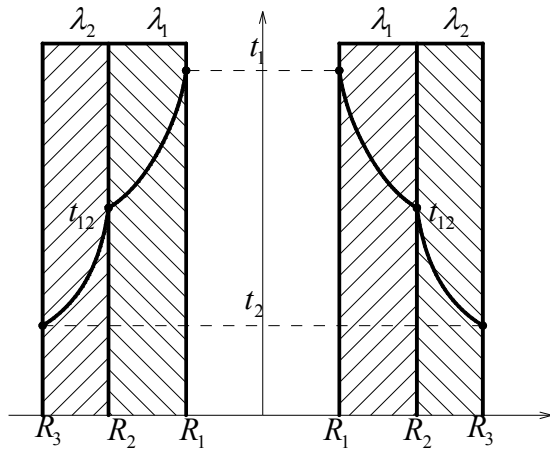
Вишеслојни цилиндрични зид

Аналогно вишеслојном равномфлукс кроз цилиндричан зид је дат изразом:

$$\Phi = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi l} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i}}$$

За двослојни зид:

$$\Phi = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi l} \left(\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{R_3}{R_2} \right)}$$



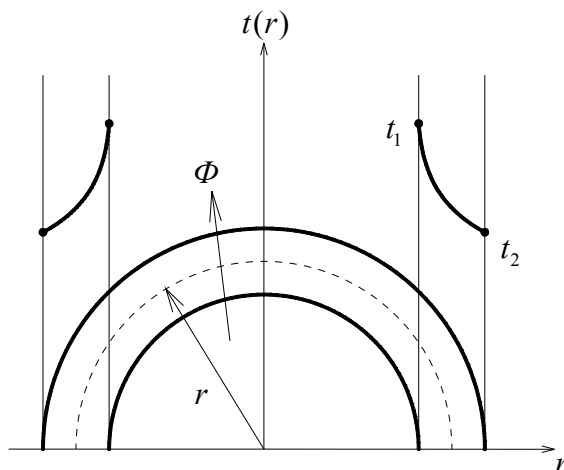
Температуру t_{12} одређујемо из флукса за унутрашњи слој:

$$\Phi = \frac{t_1 - t_{12}}{\frac{1}{2\pi l} \left(\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{R_3}{R_2} \right)} \quad \text{и} \quad t_{12} = t_1 - \frac{\Phi}{2\pi l \lambda_1} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Термичка отпорност вишеслојног цилиндричног зида: $R_t = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i}$

Провођење топлоте кроз сферичан (сферни) зид

Посматрамо хомоген сферни зид у облику куполе дебљине $R_2 - R_1$, коефицијента топлотне проводљивости λ у стационарном случају ($\Phi = \text{const}$).



$$\Phi = \text{const}$$

$$\Phi = q \cdot S = -\lambda \frac{dt}{dr} \cdot 2\pi r^2$$

Уочили смо концентричну куполу полупречника r унутар материјала кроз коју је флуks дат горњим изразом.

Раздвајањем промењивих налазимо:

$$\frac{dr}{r^2} = -\frac{2\pi\lambda}{\Phi} dt$$

$$\int_{R_1}^r r^{-2} dr = -\frac{2\pi\lambda}{\Phi} \int_{t_1}^{t(r)} dt$$

$$\left. \frac{r^{-1}}{-1} \right|_{R_1}^r = -\frac{2\pi\lambda}{\Phi} (t(r) - t_1)$$

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} = \frac{2\pi\lambda}{\Phi} (t_1 - t(r))$$

$$t(r) = t_1 - \frac{\Phi}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right)$$

Видимо да температура опада као $\frac{1}{r}$.

Флуks Φ одређујемо из познате температуре на спољашњој површини:

$$t(r = R_2) = t_2 = t_1 - \frac{\Phi}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\Phi = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

$$R_t = \frac{1}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \text{ - Термички отпор провођења куполе}$$

Вишеслојни сферични зид

Аналогно претходним случајевима имамо:

$$\Phi = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right)}$$

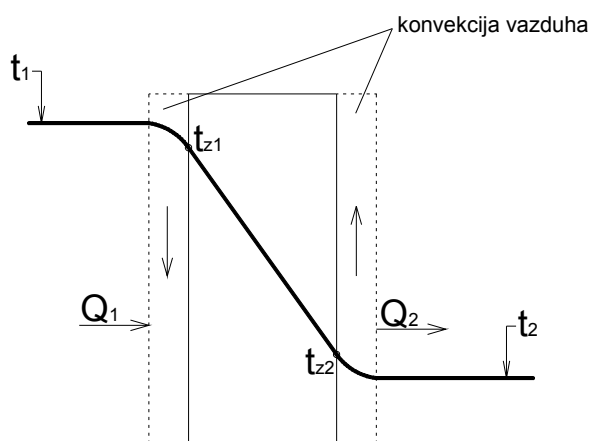
$$\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) \text{ - термички отпор}$$

$$\left. \begin{aligned} t_{12} &= t_1 - \frac{\Phi}{2\pi\lambda_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ t_{23} &= t_{12} - \frac{\Phi}{2\pi\lambda_2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \text{ - температура између слојева}$$

Прелаз топлоте

Прелаз топлоте је процес размене топлоте између тела различитог агрегатног стања. Посебно нас интересује прелаз између чврстог и гасовитог, и течног и чврстог тела. Овај процес карактерише тзв. конвективно струјање на граници тела што је последица промене густине гаса или течности и постојања силе притиска. Тако имамо струјање ваздуха поред површина зидова.

На слици је дат зид са околном температуром ваздуха t_1 и t_2 са означеним областима струјања ваздуха (конвекције). Са леве стране ваздух струји низ а са десне уз зид.



Лево уз топлију површину зида ваздух природном конвекцијом струји наниже јер се хлади од t_1 до t_{z1} , постаје гушћи (смањује му се специфична запремина па расте густина $\rho = \frac{m}{V}$). Са десне хладнији ваздух се греје од t_2 до t_{z2} , постаје специфично

лакши (има већу специфичну запремину јер се шири) и услед силе потиска околног хладнијег ваздуха природно струји навише.

Ове конвективне зоне струјања значајно утичу на процес преласка топлоте са ваздуха на зид јер се дешава провођењем кроз покретан слој флуида.

Експериментално је одређено да топлота која се проводи кроз овај конвективан слој износи:

$$Q_1 = \alpha_1 S \tau (t_1 - t_{z1})$$

$$Q_2 = \alpha_2 S \tau (t_{z2} - t_2)$$

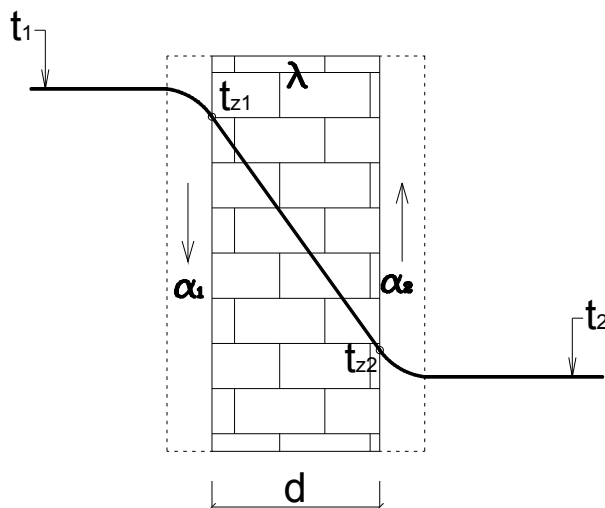
Где је: τ – време, S – површина зида, α_1 и α_2 су коефицијенти прелаза топлоте који се експериментално одређују и зависе од веома великог броја параметара (нпр температуре, брзине струјања, положаја зида у односу на вертикалу, влажности ваздуха, храпавости површине зида, итд.).

Пролаз топлоте

Пролаз топлоте је појава транспорта топлоте између два флуида кроз зид који их раздваја и у себи укључује: прелаз1 + провођење + прелаз2.

Ова појава се експериментално описује изразом за топлоту која пролази и дата је формулом:

$$Q = KS\tau(t_1 - t_2), \text{ K-коефицијент пролаза топлоте}$$



У стационарном случају флуксеви прелаза и провођења су исти, тј:

$$\Phi_1 = \alpha_1 S (t_1 - t_{z1})$$

$$\Phi_2 = \frac{\lambda S}{d} (t_{z1} - t_{z2})$$

$$\Phi_3 = \alpha_2 S(t_{z2} - t_2)$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \Phi$$

\Rightarrow

$$\left. \begin{aligned} t_1 - t_{z1} &= \frac{\Phi}{\alpha_1 S} \\ t_{z1} - t_{z2} &= \frac{\Phi d}{\lambda S} \\ t_{z2} - t_2 &= \frac{\Phi}{\alpha_2 S} \end{aligned} \right\} \text{сумирањем леве и десне стране:}$$

$$t_1 - t_2 = \Phi \left(\frac{1}{\alpha_1 S} + \frac{1}{S \frac{\lambda}{d}} + \frac{1}{\alpha_2 S} \right)$$

$$\Phi = \frac{(t_1 - t_2) S}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad [W] \text{ - Флукс}$$

$$q = \frac{\Phi}{S} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad \left[\frac{W}{m^2} \right] \text{ - Густина флука}$$

Величина $R_t = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}$ се назива термички отпор пролаза топлоте. Чланови $\frac{1}{\alpha_1}$ и $\frac{1}{\alpha_2}$ представљају отпоре преласка топлоте кроз конвективни слој.

Дакле, конвективно струјање ваздуха поред зида отежава провођење топлоте.

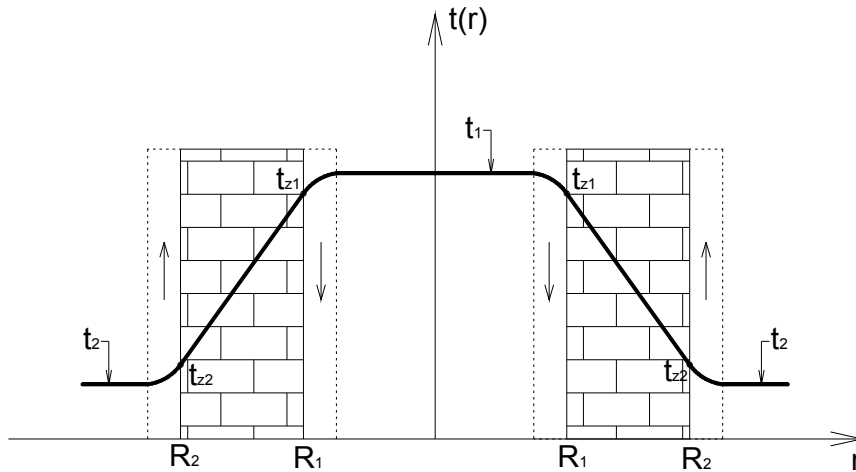
Температуре зида t_{z1} и t_{z2} можемо да одредимо из флука:

$$t_{z1} = t_1 - \frac{\Phi}{\alpha_1 S} = t_1 - \frac{(t_1 - t_2)}{\alpha_1 \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right)}$$

$$t_{z2} = t_2 + \frac{\Phi}{\alpha_2 S} = t_2 + \frac{(t_1 - t_2)}{\alpha_2 \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right)}$$

Пролаз топлоте кроз цилиндричан зид

Посматрамо шупаљ цилиндричан зид од материјала топлотне проводљивости материјала λ ; Температуре ваздуха унутар и ван цилиндра су t_1 и t_2 .



Флуксеви у овом случају су:

$$\Phi_1 = \alpha_1 S_1 (t_1 - t_{z1}) = \alpha_1 \cdot 2\pi R_1 h (t_1 - t_{z1})$$

$$\Phi_2 = \frac{t_{z1} - t_{z2}}{\frac{1}{2\pi\lambda h} \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

$$\Phi_3 = \alpha_2 S_2 (t_{z2} - t_2) = \alpha_2 \cdot 2\pi R_2 h (t_{z2} - t_2)$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \Phi$$

$$\left. \begin{aligned} t_1 - t_{z1} &= \frac{\Phi}{2\pi\alpha_1 R_1 h} \\ t_{z1} - t_{z2} &= \frac{\Phi}{2\pi\lambda h} \ln \frac{R_2}{R_1} \\ t_{z2} - t_2 &= \frac{\Phi}{2\pi\alpha_2 R_2 h} \end{aligned} \right\} \text{сумирамо леве и десне стране}$$

$$t_1 - t_2 = \Phi \left(\frac{1}{2\pi\alpha_1 R_1 h} + \frac{1}{2\pi\lambda h} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{2\pi\alpha_2 R_2 h} \right)$$

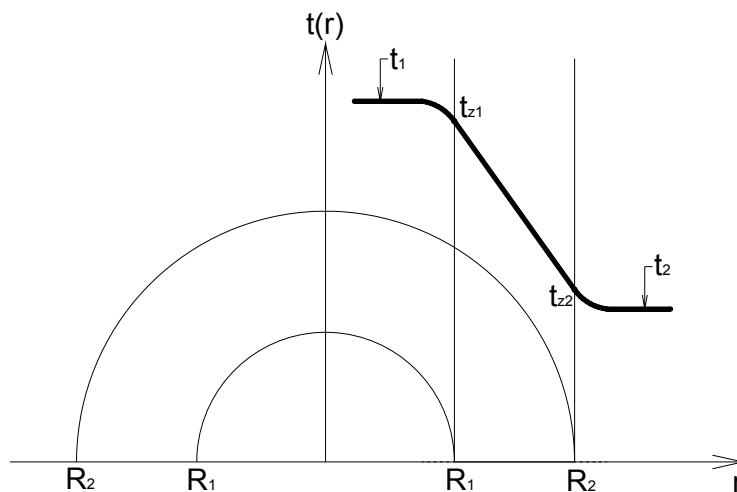
$$\boxed{\Phi = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi h} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\alpha_2 R_2} \right)}} - \text{Флукс}$$

$$q' = \frac{\Phi}{h} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\alpha_2 R_2} \right)} \quad - \text{ Подужна густина флуksа (колико зид губи топлоте по метру дужном)}$$

$$R_t = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\alpha_2 R_2} \right) \quad - \text{ Термичка отпорност пролаза топлоте кроз цилиндричан зид.}$$

Пролаз топлоте кроз сферичан (сферни) зид

Посматрамо зид у облику куполе као на слици:



Флуксеви су:

$$\Phi_1 = \alpha_1 S_1 (t_1 - t_{z1})$$

$$\Phi_2 = \frac{t_{z1} - t_{z2}}{\frac{1}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

$$\Phi_3 = \alpha_2 S_2 (t_{z2} - t_2)$$

Због стационарности: $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \Phi = const$.

$$\left. \begin{aligned} t_1 - t_{z1} &= \frac{\Phi}{\alpha_1 S_1} \\ t_{z1} - t_{z2} &= \frac{\Phi}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ t_{z2} - t_2 &= \frac{\Phi}{\alpha_2 S_2} \end{aligned} \right\} \text{Сумирамо леву и десну страну:}$$

$$t_1 - t_2 = \Phi \left(\frac{1}{\alpha_1 S_1} + \frac{1}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 S_2} \right)$$

$$\Phi = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 S_1} + \frac{1}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 S_2}}, \quad S_1 = 2\pi R_1^2, \quad S_2 = 2\pi R_2^2:$$

$$\Phi = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_2^2} \right)} \quad \text{-Флуks}$$

$$R_t = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_2^2} \right) \quad \text{-Термичка отпорност пролаза топлоте за сферични зид.}$$

$$t_{z1} = t_1 - \frac{\Phi}{\alpha_1 S_1} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_2^2} \right)} \cdot \frac{1}{\alpha_1 \cdot 2\pi R_1^2}$$

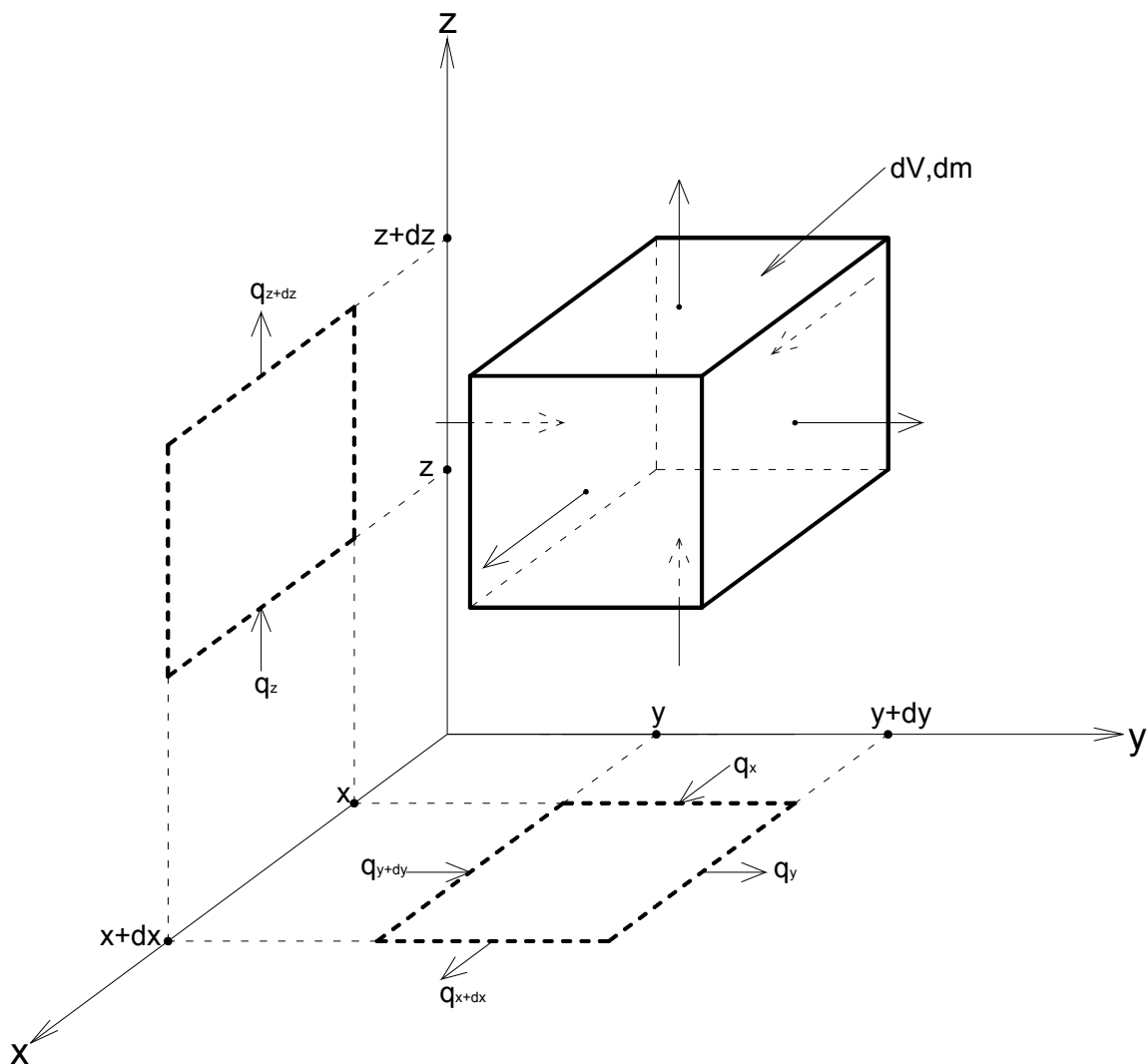
$$t_{z1} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\alpha_1 R_1^2 \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_2^2} \right)}$$

$$t_{z2} = t_2 + \frac{\Phi}{\alpha_2 S_2} = t_2 + \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_2^2} \right)} \cdot \frac{1}{\alpha_2 \cdot 2\pi R_2^2}$$

$$t_{z2} = t_2 + \frac{t_1 - t_2}{\alpha_2 R_2^2 \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_2^2} \right)}$$

Нестационарна Фуријеова једначина провођења топлоте

Изводимо једначину која описује временски промењива температурска поља. Посматрамо бесконачно мали део средине, запремине dV и масе dm у облику паралелопипеда и уочавамо топлотне флуксе кроз сваку његову површ.



Извођење једначине се своди на писање билансних једначина за провођење топлоте кроз уочену запремину за сва три правца: x , y и z . То значи писање израза за топлоту која улази кроз једну површ, а излази кроз њој паралелну другу површ, и тако за сва три правца. (На слици то су густине топлотних флуксева: q_x , q_{x+dx} , q_y , q_{y+dy} , q_z , q_{z+dz} где су индекси координате паралелних површи.)

Тражимо биланс топлоте дуж x осе. Топлота која улази у паралелопипед кроз површ координате x износи:

$$\delta Q_x = q_x dy dz d\tau$$

$$(dy dz = ds, d\tau - \text{бесконачно мало време}) \left(q = \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta \tau} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta \Phi}{\Delta S} \Rightarrow \Delta Q = q \Delta S \Delta \tau \right)$$

Топлота која изађе кроз наспрамну паралелну површ са координатом $x + dx$ износи:

$$\delta Q_{x+dx} = q_{x+dx} dydzd\tau$$

Где су q_x и q_{x+dx} густине топлотних флукса кроз те површи, и оне могу бити коначне.

Аналогно за остале правце имамо:

$$\delta Q_y = q_y dx dz d\tau$$

$$\delta Q_{y+dy} = q_{y+dy} dx dz d\tau$$

$$\delta Q_z = q_z dx dy d\tau$$

$$\delta Q_{z+dz} = q_{z+dz} dx dy d\tau$$

Сада користимо Фуријеов закон који повезује густину топлотног флукса и температуру.

За густине дуж x осе имамо:

$$q_x = -\lambda \left. \frac{dt}{dx} \right|_x$$

$$q_{x+dx} = -\lambda \left. \frac{dt}{dx} \right|_{x+dx}$$

Акумулација топлоте у паралелопипеду која је последица разлике доведене и одведене топлоте је:

$$\delta Q_x - \delta Q_{x+dx} = (q_x - q_{x+dx}) dydzd\tau = \left(-\lambda \left. \frac{dt}{dx} \right|_x + \lambda \left. \frac{dt}{dx} \right|_{x+dx} \right) dydzd\tau = \lambda \left(\left. \frac{dt}{dx} \right|_{x+dx} - \left. \frac{dt}{dx} \right|_x \right) dydzd\tau$$

$$\delta Q_x - \delta Q_{x+dx} = \lambda \frac{\left. \frac{dt}{dx} \right|_{x+dx} - \left. \frac{dt}{dx} \right|_x}{dx} dx dy dz d\tau = \lambda \frac{d\left(\frac{dt}{dx}\right)}{dx} dV d\tau, \quad dV = dx dy dz;$$

$$\delta Q_x - \delta Q_{x+dx} = \lambda \frac{d}{dx} \left(\frac{dt}{dx} \right) dV d\tau$$

Коначно је:

$$\delta Q_x - \delta Q_{x+dx} = \lambda \frac{d^2 t}{dx^2} dV d\tau \quad \text{-Акумулирана топлота у паралелопипеду услед њеног струјања дуж } x \text{ осе}$$

Аналогно за y и z правац имамо:

$$\delta Q_y - \delta Q_{y+dy} = \lambda \frac{d^2 t}{dy^2} dV d\tau$$

$$\delta Q_z - \delta Q_{z+dz} = \lambda \frac{d^2 t}{dz^2} dV d\tau$$

Сабирањем сва три биланса добијамо укупну акумулацију топлоте у паралелопипеду:

$$\delta Q = (\delta Q_x - \delta Q_{x+dx}) + (\delta Q_y - \delta Q_{y+dy}) + (\delta Q_z - \delta Q_{z+dz})$$

$$\delta Q = \lambda dV d\tau \underbrace{\left(\frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{d^2 t}{dy^2} + \frac{d^2 t}{dz^2} \right)}_{\text{Laplasov izvod } \nabla^2 t}; \quad t = t(x, y, z, \tau)$$

Са друге стране $\delta Q \stackrel{\text{def}}{=} dm \cdot C \cdot dt$, ($Q = mc\Delta t$), $\Rightarrow \delta Q = \rho dV c dt$, $dm = \rho dV$

Дакле имамо:

$$\rho dV c dt = \lambda dV d\tau \cdot \nabla^2 t$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\lambda}{\rho c} \left(\frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{d^2 t}{dy^2} + \frac{d^2 t}{dz^2} \right) = \frac{\lambda}{\rho c} \nabla^2 t$$

$$\boxed{\frac{dt}{d\tau} = \frac{\lambda}{\rho c} \nabla^2 t} \text{ - Фуријеова једначина нестационарног провођења топлоте}$$

Једначина стационарног провођења топлоте је:

$$\frac{\lambda}{\rho c} \nabla^2 t = 0, \quad \text{тј.: } \nabla^2 t = 0 \quad (\text{јер нема зависности од времена па је } \frac{dt}{d\tau} = 0.)$$

Фуријеова једначина се за тела правилног облика се може решити у аналитичком облику (тј. преко математичких функција), а за тела неправилних облика путем нумеричке анализе и компјутерских програма специјално писаних за ову једначину.

Ако унутар тела постоје топлотни извори и понори онда се Фуријеова једначина модификује густином топлотног флукса извора (понора) $q_i(x, y, z, \tau)$ на следећи начин:

$$\boxed{\frac{dt}{d\tau} = \frac{\lambda}{\rho c} \nabla^2 t + \frac{q_i(x, y, z, \tau)}{\rho c}}$$

q_i описује колико Џула топлоте у једној секунди емитује (апсорбује) извор (понор).

Размена топлоте зрачења

Планков закон

Max Planck (1858-1947)

Сва загрејана тела на $T = 0K$ зраче електромагнетни талас. На тај начин губе енергију (хладе се). Енергија се зрачи у „порцијама“ (квантима), који се називају фотони. Такође тела апсорбују таласе преко фотона. Узрок зрачења тела је стално кретање атома (молекула). Наиме, наелектрисане честице при убрзаном кретању зраче. Атоми су увек у кретању (код чврстих тела вибрирају око фиксираних положаја, у гасовима се сударају и нагло мењају брзину и зато зраче).

За историјски развој физике је било важно откриће емисије и апсорпције енергије у виду фотона (до тада се веровало да је зрачење континуалне природе, тј. да се енергија размењује континуално, а не у „пакетима“).

Енергија фотона се израчунава по Планковој формули : $E_f = h \cdot f$, где је h – Планкова константа и износи $h = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$, а f – фреквенција у Херцима $[\text{Hz}]$.

Планков закон описује зрачење тзв. апсолутно црног тела, а лако се примењује и на остала тзв. сива тела. Апсолутно црна тела постоје у природи и имају особину да апсорбују сваки фотон који падне на њих (зато су црна јер ништа не рефлектују). Нпр свако шупље тело, које је непрозирно, са малим отвором представља црно тело, тачније, његова унутрашњост је то.

Планк је увео физичку величину, по називу спектрална запреминска густина зрачења и обележава се са $W(\lambda, T)$, која представља колико зрачене енергије има у једном метру кубном вакума шупљине црног тела, на температури T , која потиче само од фотона таласне дужине λ . Јединица је Џул по метру кубном по јединици таласне дужине:

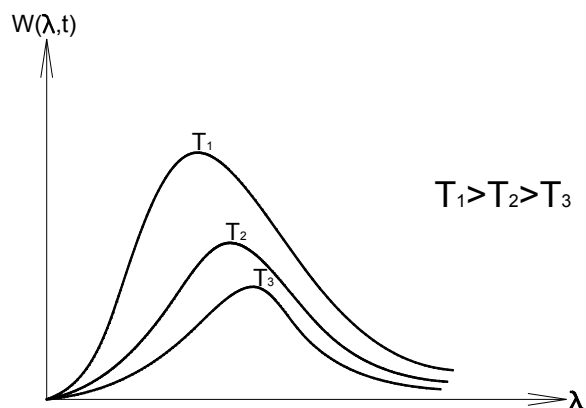
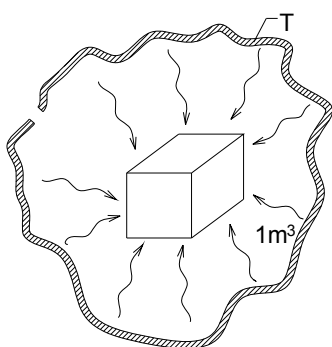
$$\frac{J/m^3}{m} = \frac{J}{m^4}.$$

Ако нас интересује укупна енергија у једном метру кубном шупљина, треба сабрати енергије свих фотона, тј. интегралити претходну величину по свим таласним дужинама.

$$E(T) = \int_0^{\infty} W(\lambda, T) d\lambda$$

Само наводимо Планков закон:

$$W(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}, \text{ где је } k \text{ – Болцманова константа, } c \text{ – брзина светлости}$$



Важно је приметити померање максимума са порастом температуре на мањим таласним дужинама. То значи да тела на вишим температурама зраче највише фотоне мањих таласних дужина, јер енергија фотона преко таласне дужине је дата формулом:

$$E_f = \frac{hc}{\lambda}.$$

Винов закон померања

Овај закон повезује таласну дужину на којој тело максимално зрачи и температуру тела.

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \quad b - \text{Винова константа, } b = 0.289 \text{ K} \cdot \text{m}$$

Емисиона моћ чврстих тела

За праксу је од интереса да имамо израз за енергију коју иззрачи неко тело у јединици времена по јединици површине. Спектрална густина то није, јер је енергија по јединици запремине у шупљинама.

Уводимо емисиону моћ црног тела $M(\lambda, T)$ која је $\frac{J}{s \cdot m^2}$ и представља енергију коју јединица површине иззрачи у околни простор и која је повезана са спектралном густином: $M(\lambda, T) = \frac{c}{4} W(f, T)$;

$W(f, T)$ – Планков закон дат преко фреквенције ($\lambda = \frac{c}{f}$)

$$M(f, T) = \frac{2\pi h f^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}$$

Ово је формула која даје колико Џула један метар квадратни црног тела на температури T иззрачи; дата преко фреквенције.

Укупан губитак енергије зрачења је интеграл по фреквенцији ове величине и једнак је:

$$E(T) = \int_0^{\infty} M(f, T) df = \sigma T^4 \quad \text{-Штефан-Болцманов закон}$$

σ – Штефан-Болцманова константа и износи: $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$

Кирхофов закон зрачења

Gustav Kirchhoff (1824-1887)

До сада смо описивали емисију зрачења, али од значаја је и апсорпција, процес супротан емисији јер представља механизам којим се тело загрева зрачењем.

Овај закон утврђује да емисиона и апсорпциона својства зависе само од температуре и фреквенције зрачења. За апсолутно црна тела за све температуре и фреквенције апсорпција је потпуна (нема рефлексије зрачења од тела).

Постоје и сива тела чија је апсорпција мања од црног а већа од белог тела.

Веза између емисионих и апсорпционих карактеристика тела је дата преко емисионе моћи црног тела.

За сиво тело:

$$E(f, T) = a_s \cdot M(f, T)$$

$M(f, T)$ – емисиона моћ црног тела

$E(f, T)$ – емисиона моћ сивог тела

a_s – коефицијент апсорпције: $0 < a_s < 1$

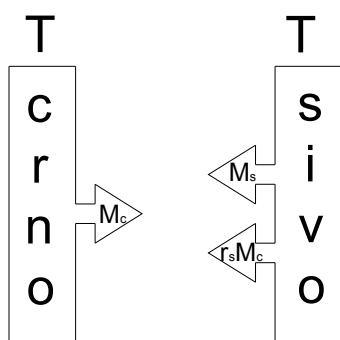
a_s се дефинише као количник апсорбоване и укупне зрачне енергије која падне на тело.

Уводимо коефицијент емисије ε_s сивог тела као количник емитоване зрачне енергије и исте коју зрачи црно тело. Он је такође $0 < \varepsilon_s < 1$.

Кирхофов закон тврди: **емисиона и апсорпциона моћ сивог тела су једнаке.**

Докажимо ово.

Посматрамо две паралелне површине сиву и црну.



Дакле, имамо две исте паралелне плоче: идеално црну и сиву на истој температури, које размењују енергију зрачењем.

M_c – укупна емисиона моћ црног тела

M_s – укупна емисиона моћ сивог тела

$r_s M_c$ – рефлектована енергија зрачења црног тела са површине сивог (за разлику од црног сиво тело не апсорбује сво зрачење)

Направимо енергетски биланс за сиво тело:

На њега пада M_c а са њега полази $M_s + r_s M_c$. Пошто је температура константна, мора да важи: $M_c = M_s + r_s M_c$, дакле имамо:

$$\sigma T^4 = \varepsilon_s \sigma T^4 + r_s \sigma T^4, \quad r_s - \text{коефицијент рефлексије: } r_s = 1 - a_s \Leftrightarrow a_s + r_s = 1$$

Када једначину енергетског биланса горе поделимо са леве и десне стране са σT^4 добијамо:

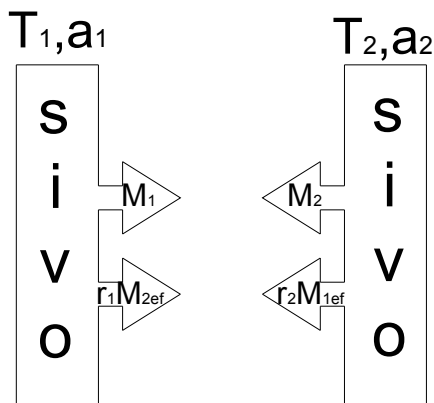
$$1 = \varepsilon_s + r_s$$

$$1 = \varepsilon_s + 1 - a_s \Rightarrow$$

$$\boxed{\varepsilon_s = a_s} \text{ -Емисиона и апсорпциона својства сивом телу су иста.}$$

Размена топлоте зрачењем између две паралелне сиве површине

Посматрамо два сива тела паралелних површина на различитим температурама T_1 и T_2 која размењују енергију зрачењем. Коефицијенти апсорпција површина су a_1 и a_2 .



$M_{1,ef}$ – (*M 1 ефективно*)-емисиона моћ првог тела заједно са рефлектованом енергијом зрачења са другог тела.

$M_{2,ef}$ – (*M 2 ефективно*)-емисиона моћ другог тела заједно са рефлектованом енергијом зрачења са првог тела.

$$M_{1,ef} = M_1 + r_1 M_{2,ef}$$

M_1 – емисиона моћ првог тела када је усамљено

$$M_{2,ef} = M_2 + r_2 M_{1,ef}$$

M_2 – емисиона моћ другог тела када је усамљено

Имамо систем једначина:

$$M_{1,ef} = M_1 + r_1 M_{2,ef}$$

$$M_{2,ef} = M_2 + r_2 M_{1,ef}$$

$$M_{1,ef} = M_1 + (1 - a_1)M_{2,ef}$$

$$M_{2,ef} = M_2 + (1 - a_2)M_{1,ef}$$

Решавањем система добијамо:

$$M_{1,ef} = \frac{M_1 + (1 - a_1)M_2}{1 - (1 - a_1)(1 - a_2)} = \frac{M_1 + M_2 - a_1M_2}{a_1 + a_2 - a_1a_2}$$

$$M_{2,ef} = \frac{M_2 + (1 - a_2)M_1}{1 - (1 - a_1)(1 - a_2)} = \frac{M_1 + M_2 - a_2M_1}{a_1 + a_2 - a_1a_2}$$

Интересује нас нето размењена енергија између површина. Она није 0 јер температуре тела нису исте. Топлије тело се хлади а хладније загрева. Размењена енергија је разлика ефективних емисионих моћи.

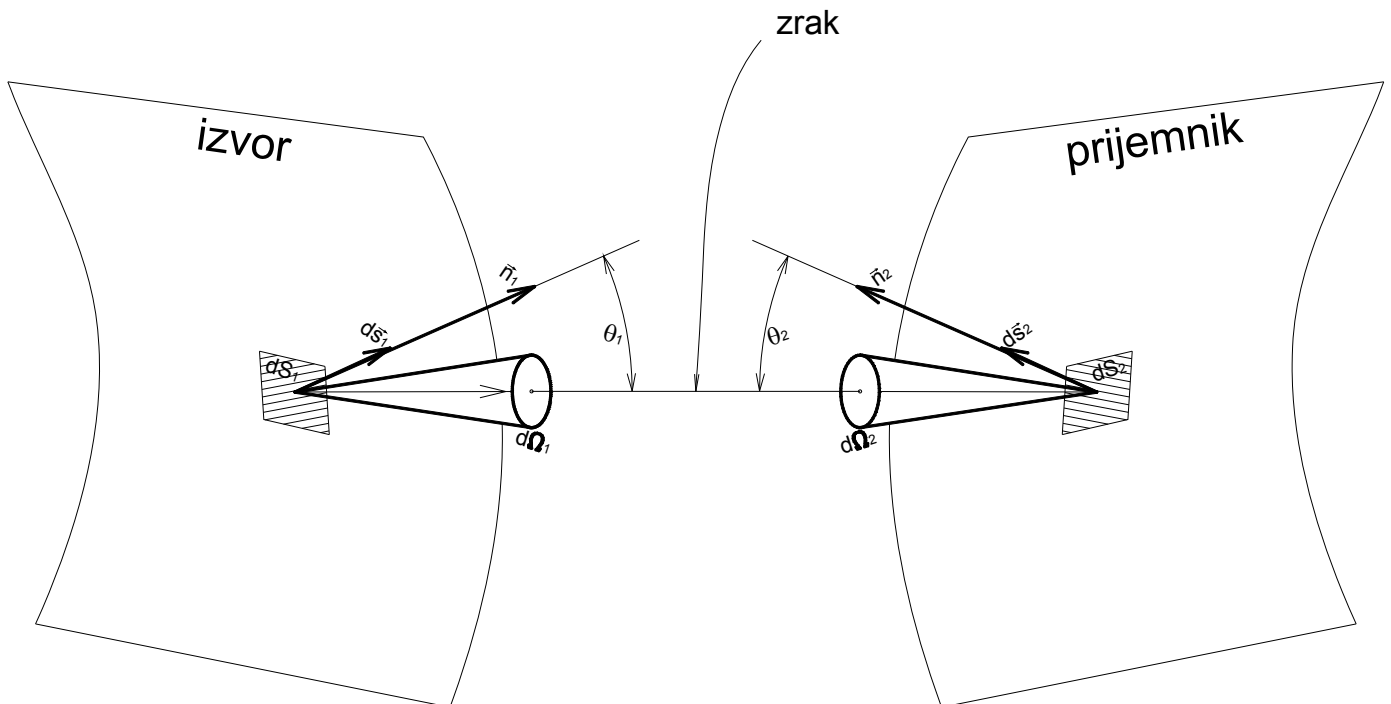
$$\Delta M = M_{1,ef} - M_{2,ef} = \frac{a_2M_1 - a_1M_2}{a_1 + a_2 - a_1a_2} = \frac{\varepsilon_2M_1 - \varepsilon_1M_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2}$$

$$\Delta M = \frac{\overbrace{\varepsilon_2\varepsilon_1\sigma T_1^4}^{M_1} - \overbrace{\varepsilon_1\varepsilon_2\sigma T_2^4}^{M_2}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\varepsilon_1\varepsilon_2\left(\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right)} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\underbrace{\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1} - 1}_{\varepsilon_{12}^{-1}}}$$

$$\boxed{\Delta M = \varepsilon_{12}\sigma(T_1^4 - T_2^4)}; \quad \varepsilon_{12}^{-1} = \varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon_{12}} = \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_1} - 1$$

Зрачне величине

Посматрамо извор и пријемник зрачења и дефинишемо зрачне величине.



\vec{n}_1, \vec{n}_2 – вектори нормала на елементарно мале површине dS_1 и dS_2

$d\vec{s}_1, d\vec{s}_2$ – вектори елементарних површина са које полази и на коју пада зрачење редом

$d\Omega_1, d\Omega_2$ – просторни углови под којим зрачење пролази (пада)

Дефинишемо следеће зрачне величине:

- 1) Зрачна енергија
 - 2) Монохроматска зрачна енергија
 - 3) Спектар зрачне енергије
 - 4) Зрачни флуks
 - 5) Зрачна емитанса
 - 6) Озраченост
 - 7) Интезитет зрачења
 - 8) Радијанса
 - 9) Густина зрачења
-
- 1) Зрачна енергија је енергија коју извор зрачи а коју сачињавају фотони свих таласних дужина. Ознака: W , јединица: $[J]$
 - 2) Монохроматска зрачна енергија је енергија коју чине фотони само једне таласне дужине.
 - 3) Спектар зрачне енергије је расподела енергије зрачног флуksа у функцији таласне дужине или фреквенције.
 - 4) Зрачни флуks је количник зрачне енергије која се пренесе у јединици времена кроз површ постављену нормално на правац преношења, и времена. Ознака: $\Phi = \frac{dW}{dt}$, јединица: $[W]$.
 - 5) Зрачна емитанса је количник зрачног флуksа и површине са које се зрачи. Ознака: $M = \frac{d\Phi}{dS}$, јединица: $[\frac{W}{m^2}]$.
 - 6) Озраченост је количник зрачног флуksа који пада на пријемник и површине пријемника. Ознака: $E = \frac{d\Phi}{dS_2}$, јединица: $[\frac{W}{m^2}]$.
 - 7) Интензитет зрачења је количник зрачног флуksа и просторног угла под којим зрачи извор. Ознака: $I = \frac{d\Phi}{d\Omega_1}$, јединица: $[\frac{W}{sr}]$. (sr – стер радијан)
 - 8) Радијанса је количник интезитета зрачења и површине постављене нормално на правац зрачења. ($\theta_1 = 0$). Ознака: $L = \frac{dI}{dS_{1n}} = \frac{d^2\Phi}{dS_{1n}d\Omega_1}$, јединица: $[\frac{W}{m^2 sr}]$.
 - 9) Густина зрачења је количник зрачне енергије и запремине у којој се она посматра. Ознака: $u = \frac{dW}{dV}$, јединица: $[\frac{J}{m^3}]$.

ДИФУЗИЈА

Дифузија је процес спонтаног преношења молекула (честица) средине путем хаотичних судара. Ово кретање, поред хаотичне, има једну усмерену компоненту из области више концентрације у област ниже супстанце која дифундује.

Дакле, узрок дифузије је разлика у концентрацији, а може бити и разлика у средњој кинетичкој енергији молекула (кретање „врџих“ молекула у област „хладних“ молекула; „врџи“ молекули имају вишу температуру од „хладних“).

У случају разлике концентрација дифузија се назива *концентрацијска*, а услед разлике температура *термална*, коју код флуида прати и конвективно струјање супстанце (Топлији флуид струји навише а хладнији наниже када се ова два мешају).

Погонска сила за појаву дифузије је градијент концентрације или температуре $\frac{dn}{dx}$ односно $\frac{dT}{dx}$.

($\frac{dn}{dx}$ = количник промене концентрације dn између бесконачно блиских тачака на растојању dx и тог растојања; аналогно је градијент температуре).

Дифузија представља и транспорт масе који молекули имају.

Дифузија се најбрже одвија у гасовима, затим течностима, и на крају у чврстим телима.

Први Фиков закон

Adolf Eugen Fick (1829-1901)

Посматрајмо дифузију једне супстанце у средини друге супстанце (нпр молекула водене паре између молекула у ваздуху).

Концентрација дифундујуће супстанце мора да буде много мања од концентрације молекула средине кроз коју се врши дифузија. (услов важења овог закона!)

За случај водене паре у ваздуху ово је увек испуњено. Експериментално је утврђено да је маса пренесена дифузијом сразмерна градијенту концентрације дуж правца дифузије, површини кроз коју се врши дифузија, и времену дифундовања. Такође зависи од врсте молекула дифундујуће супстанце и молекула средине. За бесконачно кратко време dt , кроз бесконачно малу површину dS пренесе се бесконачно мало масе dm :

$$d^2m = -D \frac{dn}{dz} dS dt$$

D – коефицијент дифузије и зависи од температуре, притиска, и врсте молекула

z – правац дифузије

$dn = n(z + dz) - n(z)$ – разлика концентрација у две бесконачно блиске тачке

Знак минус (–) анулира негативан знак градијента $\frac{dn}{dz}$ јер молекули дифундују у област ниже концентрације, тј: $n(z) > n(z + dz)$.

Дефинишемо масени дифузиони флуks $J = \frac{d^2m}{dSdt} = -D \frac{dn}{dz} \left[\frac{kg}{m^2 \cdot s} \right]$.

То је маса која за један секунд прође кроз један метар квадратни површине постављене нормално на правац дифузије.

Јединица за масени коефицијент дифузије је $D \Leftrightarrow \left[\frac{kg \cdot m^2}{s} \right]$

Фиков закон има још једно ограничење, тј. важи само у случају када је збир концентрација дифундујуће и концентрације супстанце кроз коју дифундује у свакој тачки константан, тј. притисак гаса кроз који се врши дифузија је константан у свакој тачки. Овај услов је у потпуности задовољен за случај водене паре у ваздуху јер је ваздушан притисак сразмеран концентрацији молекула ма који да су. Тј. њему доприносе равномерно сви молекули: N_2 , O_2 , CO_2 и H_2O .

Као пример изводимо Фикове једначине за дифузију водене паре услед градијента температуре и градијента притиска. Термодинамичка стања паре и ваздуха описујемо законима идеалних гасова, што је врло добар модел и даје мале грешке (концентрација паре је обично много мања од концентрације молекула ваздуха, за гасове на ниским притисцима и високим температурама управо важи модел идеалног гаса.)

Дакле, постоји градијент температуре у гасу и молекули водене паре услед тога дифундују из области више у област ниже температуре.

Једначина стања водене паре: $PV = n_{mol}RT(z)$

$$PV = \frac{m}{M}RT(z) = \frac{m_{mol}N_{mol}RT(z)}{M}$$

$$\frac{PM}{m_{mol}RT(z)} = \frac{N_{mol}}{V} = n(z) \rightarrow \text{концентрација молекула}$$

M – моларна маса

R – универзална гасна константа

P – притисак паре

m_{mol} – маса једног молекула воде

Масени дифузиони флуks: $J = -D \cdot \frac{dn(z)}{dz}$

$$J = -D \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{PM}{m_{mol}R} \cdot \frac{1}{T(z)} \right)$$

$$J = -D \cdot \frac{PM}{m_{mol}R} \cdot \frac{d}{dz}(T^{-1}(z))$$

$$J = -D \cdot \frac{PM}{m_{mol}R} \cdot (-1)T^{-2} \cdot \frac{dT}{dz}$$

$$J = D \cdot \frac{PM}{m_{mol}R} \cdot \frac{1}{T^2} \cdot \frac{dT}{dz}$$

$$J = D \cdot \underbrace{\frac{PM}{m_{mol}RT}}_{n(z)} \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{dT}{dz}$$

$$\boxed{J = D \cdot n(z) \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{dT}{dz}} \text{ -Ово је формула за израчунавање масеног флуksа водене паре кроз један метар квадратни за једну секунду на месту са координатом } z \text{ .}$$

Ако се дифузија јавља услед градијента притиска, тј. ако познајемо градијент притиска а не температуре, користимо следећу формулу коју изводимо:

$$J = -D \cdot \frac{dn}{dz} = -D \cdot \frac{dn}{dp} \cdot \frac{dp}{dz}; \quad T = const$$

$$J = -D \cdot \frac{d}{dp} \left(\frac{PM}{m_{mol}RT} \right) \frac{dp}{dz} = -D \cdot \frac{M}{m_{mol}RT} \cdot \frac{dp}{dz}$$

$$J = -D \cdot \underbrace{\frac{PM}{m_{mol}RT}}_{n(P)} \cdot \frac{1}{P} \cdot \frac{dp}{dz}$$

$$\boxed{J = -D \cdot n(P) \cdot \frac{1}{P} \cdot \frac{dp}{dz}} \text{ - Дифузиони флуks у случају да постоји градијент притиска.}$$

Други Фиков закон

Важи за временски промењиве услове дифузије, тј. када концентрација односно број молекула који дифундује зависи од времена. Ово је врло блиско реалности јер увек имамо „изворе“ и „поноре“ супстанце.

Полазимо од првог Фиковог закона, али написаног за број молекула који дифундује N :

$$d^2N = -D \frac{dn}{dz} dS dt$$

(Напомена: овај коефицијент D и онај из I Фиковог закона за масу нису исти!)

$$n = \frac{d^2N}{dS dz} = \frac{d^2N}{dV}$$

$$n \cdot dS = \frac{d^2 N}{dz}$$

$$d^2 N = -D \frac{d}{dz} (n \cdot dS) dt$$

$$d^2 N = -D \frac{d}{dz} \left(\frac{d^2 N}{dz} \right) dt$$

$$\boxed{\frac{d^2 N}{dt} = -D \frac{d^2 N}{dz^2}}$$

Извод броја молекула по времену (физички: промена броја молекула услед дифузије на неком месту у времену) је сразмерна другом изводу броја молекула по координати дуж правца дифузије.

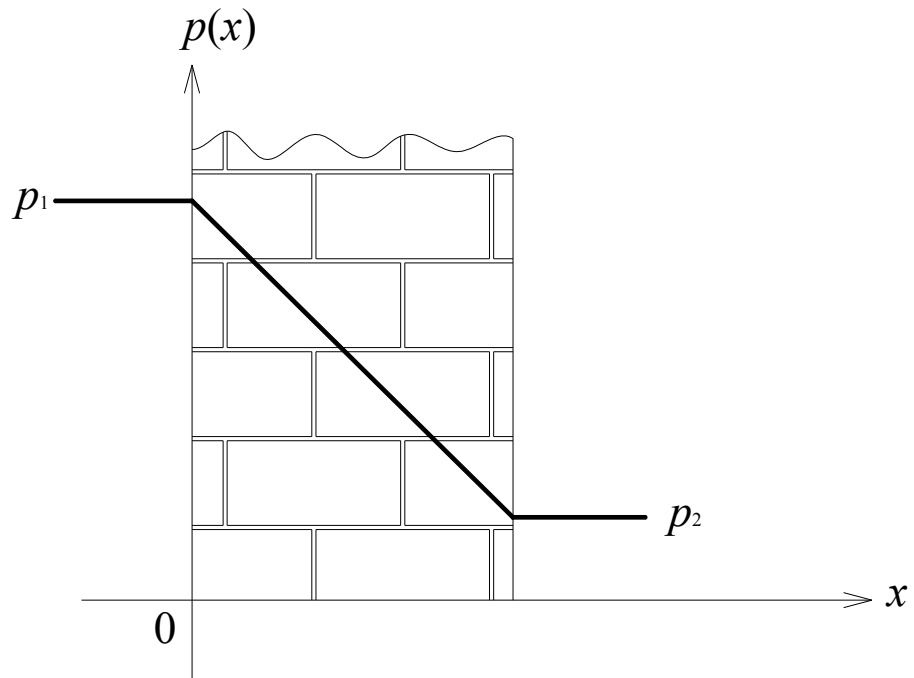
Дифузија водене паре кроз раван зид

Посматрамо раван зид дебљине d кроз који дифундује водена пара. Дифузија се одвија услед разлике притисака водене паре са једне и друге стране зида. Одредићемо израз за струју дифузије водене паре кроз зид и промену притиска водене паре кроз зид, тзв. Парцијални притисак паре. (Кажемо парцијални јер је то само једна компонента укупног притиска у просторији; чине га још притисци других гасова: N_2 , O_2 , итд...)

Полазимо од I Фиковог закона за дифузију услед градијента парцијалног притиска водене паре. Притисци на површинама зида су p_1 и p_2 , и сматрамо их познатим.

Дакле:

$$J = - \frac{Dn}{p} \cdot \frac{dp}{dx}$$



Посматрамо стационаран случај, тј. $J = const$:

$$- \frac{J}{Dn} dx = \frac{dp}{p} \quad \bigg/ \int$$

$$- \frac{J}{Dn} \int_0^x dx = \int_{p_1}^{p(x)} \frac{dp}{p}$$

$$- \frac{J}{Dn} x = \ln p(x) - \ln p_1$$

$$e^{-\frac{J}{Dn} x} = e^{\ln \frac{p(x)}{p_1}} = \frac{p(x)}{p_1}$$

$$p(x) = p_1 \cdot e^{-\frac{Jx}{Dn}}$$

Закључујемо да притисак опада експоненцијално.

Имајући у виду бројне вредности из праксе за величине x , D , J и n , примећено је да је $J \cdot x \ll D \cdot n$, тј. $\frac{Jx}{Dn} \ll 1$, зато $e^{-\frac{J}{Dn}x}$ можемо да апроксимирамо Тејлоровим полиномом првог степена, тј. да линеаризујемо израз за $p(x)$:

$$p(x) \cong p_1 \underbrace{\left(1 - \frac{Jx}{Dn}\right)}_{\approx e^{-\frac{J}{Dn}x}}$$

Одредићемо J јер знамо парцијални притисак у тачки $x = d$ (са десне стране зида).

$$p(x = d) = p_1 \left(1 - \frac{Jd}{Dn}\right) = p_2$$

\Rightarrow

$$J = \frac{p_1 - p_2}{p_1 \cdot d / Dn}$$

$$J = \frac{\Delta p}{p_1 \cdot d / Dn}$$

$$R_{dif} = p_1 \cdot d / Dn \text{ - отпор дифузије}$$

Ми усвајамо на даље линеарну законитост промене парцијалног притиска паре кроз зид.

Садржај влаге у зидовима значајно мења коефицијент топлотног провођења λ које расте и зид има умањену термичку отпорност, тј. лошије термички изолује. Даље, стварају се услови за развој микроорганизама и буђи чиме се урушавају здравствени и социјални услови живљења. Стварају се услови да при врло ниским температурама зими долази до мржњења кондензоване паре и деструкције материјала тј. механичких особина.

Коефицијент дифузије водене паре у ваздуху D је приближно $0.08 \frac{m^2}{h}$, уводи се и бездимензиони фактор отпора дифузије μ који конфигурише у изразу за дифузиону отпорност:

$$R_{dif} = \frac{\mu \cdot p_1 \cdot d}{D \cdot n}$$

μ – однос дифузије водене паре у неком материјалу према оној у ваздуху, за ваздух $\mu = 1$.

На пример:

За кречни и кречноцементни малтер μ износи од 15 до 35;

За бетон је од 70 до 150;

За опеку од пуног клинкера μ је 100.

Када унесемо вредности које карактерише дифузија водене паре долазимо до практичне формуле:

$$J = \frac{\Delta p}{1.5 \cdot 10^6 \mu d} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{h}} \right]$$

- Практична формула за израчунавање масене дифузије водене паре кроз зид дебљине d , фактора отпора μ , ако је разлика парцијалних притисака Δp .

Ако имамо вишеслојни зид, имамо онолико израза за отпор колико слојева. За сваки примењујемо уоквирену формулу, где је d дебљина слоја, парцијални притисак између слојева одређујемо аналогно поступку одређивања температуре на међуслојевима, тј. на бази познавања Δp , J и дебљине слојева.

Пример

1. Колико водене паре пролази дифузијом кроз зид од опеке дебљине 36cm омалтерисан са обе стране слојем малтера 2cm , ако је спољашња температура -10°C , релативна влажност 80% , а унутрашња температура 20°C и релативна влажност 50% .

Решење

- Притисак водене паре споља:

$$p_2 = 0.8 \cdot 2.6 \cdot 10^2 = 208 \text{ Pa}$$

($2.6 \cdot 10^2$ је притисак засићене водене паре на -10°C који се читава из таблица)

- Притисак водене паре унутра:

$$p_2 = 0.5 \cdot 23.4 \cdot 10^2 = 1170 \text{ Pa}$$

($23.4 \cdot 10^2$ је притисак засићене водене паре на 20°C који се читава из таблица)

- Разлика притисака:

$$\Delta p = 1170 - 208 = 962 \text{ Pa}$$

- Дифузиони отпор малтера:

$$R_{dif1} = 1.5 \cdot 10^6 \mu_1 d_1 = 1.5 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 0.02 = 300\,000$$

- Дифузиони отпор опеке:

$$R_{dif2} = 1.5 \cdot 10^6 \mu_2 d_2 = 1.5 \cdot 10^6 \cdot 8.5 \cdot 0.36 = 4\,590\,000$$

- Дифузиони отпор малтера споља:

$$R_{dif3} = R_{dif1}$$

- Дифузиони отпор:

$$R_{dif} = \sum_{i=1}^n R_{dif} = R_{dif1} + R_{dif2} + R_{dif3} = 5\,190\,000$$

- Коначно имамо:

$$J = \frac{\Delta p}{R_{dif}} = 0.185 \frac{\text{g}}{\text{m}^2 \text{h}}$$

Влага у зградама

Задржавање влаге у порозној средини је последица три физичка механизма: адсорпције, капиларних процеса, и кондензовања водене паре која дифундује.

Ми обрађујемо дифузију и адсорпцију.

Физичка адсорпција

Физичка адсорпција је појава депоновања молекула H_2O на површини материјала у виду слојева.

Најпре дефинишемо појам релативне влажности ваздуха φ и садржаја воде у узорку ω .

Релативна влажност је количник притиска водене паре и притиска засићене паре на

температури паре. $\varphi = \frac{p}{p_z} [\%]$

p_z се узима из таблица за засићену водену пару. Ако нема кондензовања паре $p < p_z$; Дакле p_z је максимални могући притисак паре на некој температури T . (Ако би притисак p био већи од p_z долазило би до стварања росе што до смањења броја молекула H_2O у пари односно пада притиска паре).

Садржај воде се дефинише као количник масе воде у узорку и масе сувог узорка.

$$\omega = \frac{m}{m_0} [\%]$$

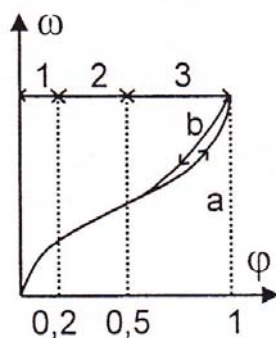
m – маса воде у узорку

m_0 – маса сувог узрка

Влага у грађевинским материјалима има троструко негативно дејство:

1. Ако смрзне разара материјал
2. Погодна средина за развој микроба и гљивица (социо-медицински аспект)
3. Дрastiчно повећање коефицијента топлотне проводљивости λ (пад термичке изолационе моћи).

Експериментално се успоставља веза између релативне влажности ваздуха и садржаја воде у узорку материјала.



Крива a се добија при повећању φ , а крива b при смањењу. У области до 20% влаге дешава се адсорпција у једном слоју, тј. материјал се прекрива финим једним слојем молекула H_2O . У области од 20% до 50% формира се више слојева молекула H_2O , а преко 50% влага попуњава пукотине (поре) у материјалу. За ову последњу област

постоји формула: $\varphi = \frac{p}{p_z} \cdot e^{\frac{2 \cdot \sigma \cdot M}{\rho \cdot r \cdot R \cdot T}}$ (Келвинова формула).

σ – површински напон између воде и паре (то је сила на површини течности која тежи да молекула увуче унутар)

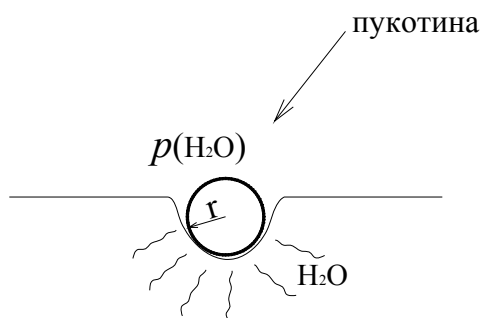
r – полупречник капилара

ρ – густина воде

M – моларна маса воде

T – температура

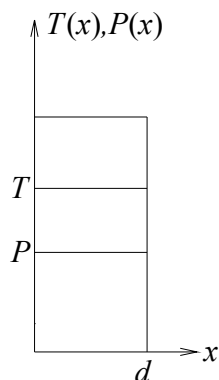
$R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$



Дифузија и кондензовање водене паре

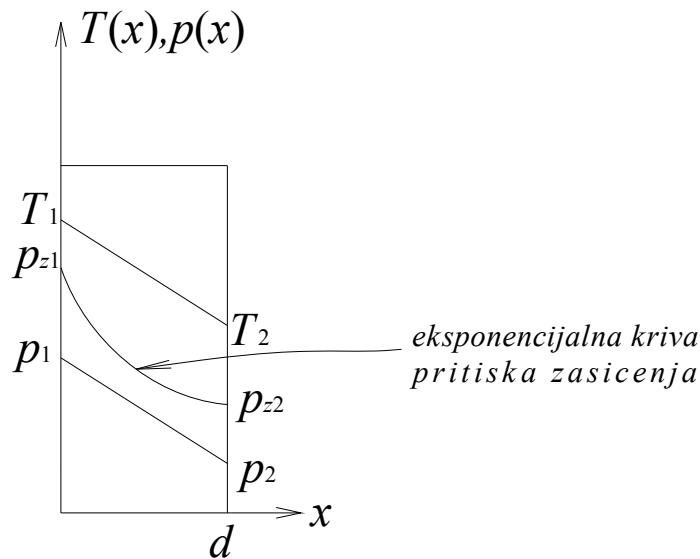
Дифузију смо раније обрадили, сада објашњавамо кондензовање.

Посматрамо једноставан раван зид дат на слици. Када је температура у зиду константна онда је и притисак паре p такође константан (јер p зависи од T преко Клаузијус-Клајперонове једначине).



И имамо ситуацију са слике.

Сада претпоставимо да је температура са леве стране виша;

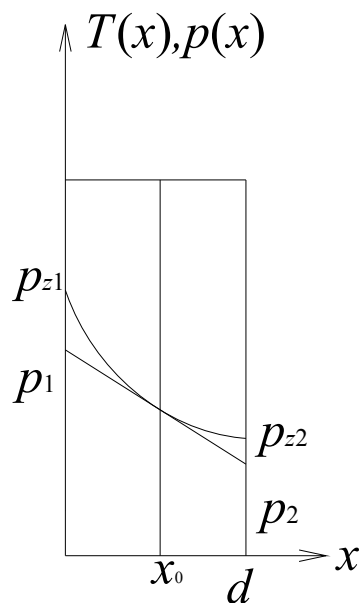


Сада и парцијални притисак водене паре се мења линеарно од p_1 до p_2 .

Ако је одговарајући притисак zasiћене паре већи у свакој тачки од p онда нема кондензовања.

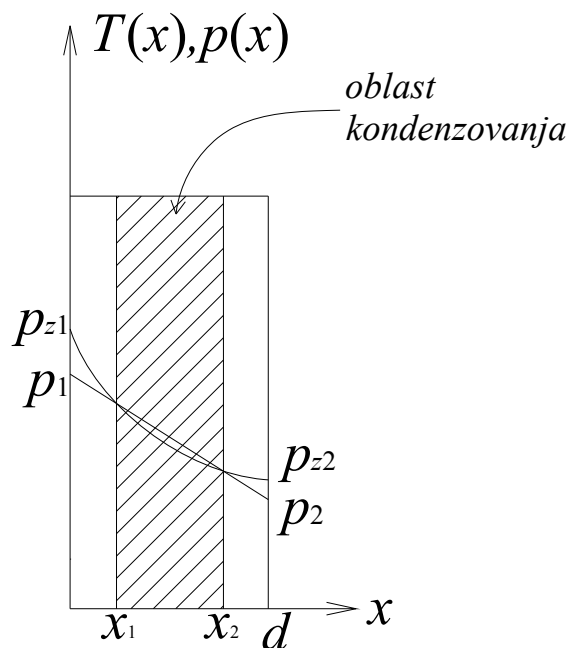
Са слике се види: $p(x) < p_z(x)$ - ово значи да нема кондензовања водене паре у воду унутар зида.

Критичан случај почетка кондензације се дешава када је у једној тачки x_0 : $p(x_0) = p_z(x_0)$, тј $p(x)$ и $p_z(x)$ се додирују.



Дакле, на месту $x = x_0$ јавља се влага у виду воде у зиду.

Драстичнији пример кондензовања је када читава једна област унутар зида ствара кондензовану воду од паре.



$$x_1 < x < x_2: \quad p(x) > p_z(x)$$

Када израчунамо густину улазног дифузионог флукса водене паре у шрафирану зону са слике на месту $x = x_1$ добијамо да је:

$$J_1 = D \frac{p_1 - p_1'}{x_1}$$

p_1' – парцијални притисак водене паре на месту x_1

А затим излазни дифузиони флукс на месту $x = x_2$:

$$J_2 = D \frac{p_2' - p_2}{x_2}$$

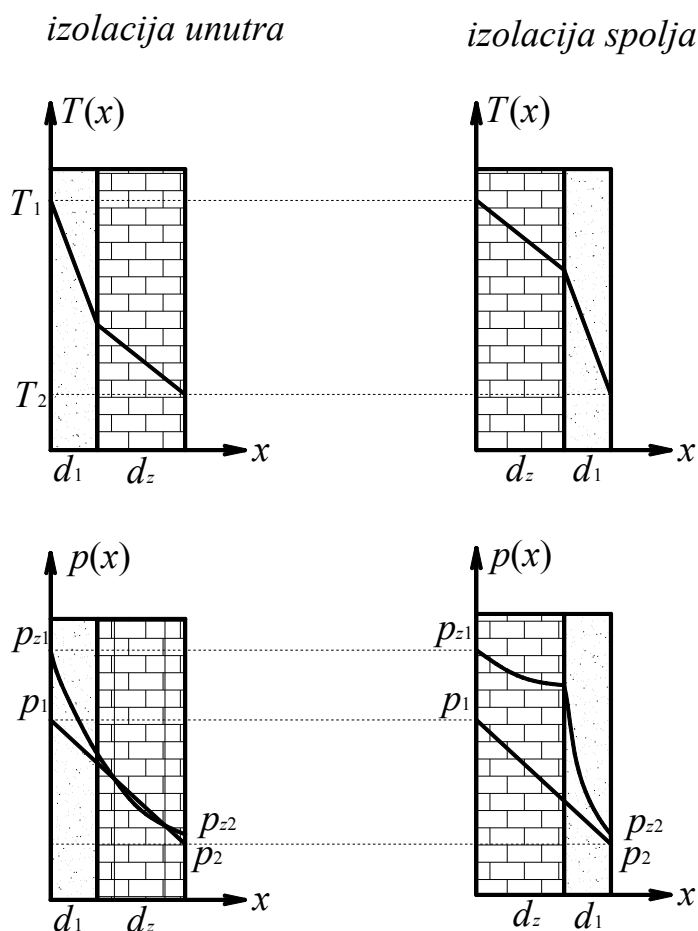
Можемо сада да одредимо акумулацију влаге у шрафираном слоју:

$$J = J_1 - J_2 = D \cdot \left(\frac{p_1 - p_1'}{x_1} - \frac{p_2' - p_2}{x_2} \right)$$

Вредности p_1 и p_2 одређујемо из временске прогнозе јер је $p_1 = \varphi \cdot p_z(0)$; $p_2 = \varphi \cdot p_z(d)$

(φ – влажност из временске прогнозе, p_z – из таблице)

Код вишеслојних зидова важно је где се ставља термоизолација. Наиме, изолација се ставља споља јер је распоред температурског поља у овом случају погоднији за елиминисање појаве кондензата, што се види на слици:



Видимо да када је изолација споља зид је у свакој тачки на вишој температури него када је изолација изнутра.

Топлији зид значи мања вероватноћа појаве кондензата, а топлији је јер је у директном контакту са топлијим ваздухом унутар просторије; У случају изолације изнутра ми зид изолујемо од топлог ваздуха па је хладнији. Температура спорије опада кроз зид јер има већи термички отпор (дебљи је од изолације). Кроз изолацију температура брже опада јер има мањи термички отпор (танка је).

ЗВУК

Субјективне и објективне карактеристике звука

Звук је свако механичко осциловање, фреквенције од 20Hz до 120Hz.

Људско ухо је врло осетљив детектор звука јер може да детектује снагу звука реда величине $10^{-17} W$ (Са аспекта енергије, осетљивије је од ока!). Ухо субјективно карактерише звук.

Субјективне величине су:

1. Јачина
2. Висина
3. Боја

Овима одговарају објективне величине:

4. Интензитет
5. Фреквенција
6. Спектар.

Јачина звука

Јачина звука зависи од интензитета звука. Човек чује промену јачине сразмерно релативној промени интензитета. Тј. јачина је сразмерна логаритму интензитета. Уместо јачине користимо величину **ниво звука** Λ . Према претходно реченом Λ је сразмеран логаритму интензитета, и ова веза је откривена експериментално.

$$d\Lambda = \frac{dI}{I}$$

Дакле, човек чује јачину звука која је сразмерна логаритму интензитета, где је интензитет објективна карактеристика звука која се може мерити инструментом.

Ниво звука се мери у децибелима, формула за израчунавање нивоа звука:

$$\Lambda = 20 \log \frac{p}{p_0} = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad [\text{dB}]$$

Где је:

$I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$ - интензитет звука фреквенције 1000 Hz који представља праг чујности.

$p_0 = 28 Pa$ - амплитуда на притисак за звук од 1 kHz на прагу чујности.

На слици је дат дијаграм чујности:



Са графика видимо да човек јако лоше чује гласове и врло високе фреквенције (рецимо изнад 16000 Hz)

Доња линија представља праг чујности у функцији фреквенције а горња праг бола.

За врло ниске фреквенције ове криве су близу што значи да је потребна побуда скоро до бола да би тај звук чули. Отуда звучне мембране за продукцију ниских фреквенција имају велику површину.

Човек најосетљивије чује звук фреквенције око 3000 Hz.

Висина звука

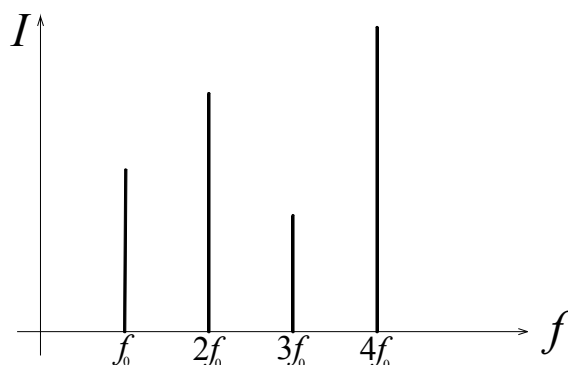
Као и интензитет, ни фреквенцију човек не чује објективно. Наиме, висина тона сразмерна је логаритму фреквенције.

Тон је звук који производе музички инструменти и људски глас.

Чист тон се састоји од више фреквенција које се добијају као умножак најниже, тј. основне фреквенције тона.

Скуп фреквенција заједно са њиховим интензитетима се назива спектар тона.

На слици је дат спектар једног тона:



Висина тона је субјективна оцена фреквенције. По висини, ми тонове делимо на осам нивоа: од *do* до *do*.

На пример, тон *re* сматрамо да је дупло виши од тона *do*, међутим износ за који се повећава фреквенција ноте *do* да би добили ноту *re* није исти за било која два суседна тона, рецимо за *mi* и *fa*.

Свако удвостручење фреквенције представља нову ноту, а опсег фреквенције суседних нота се назива октава.

Тако нота *do* има фреквенцију 31.5 Hz, нота *re* 63 Hz, *mi* има 125 Hz, *fa* 250 Hz, *sol* 500 Hz, *la* 1000 Hz, *si* 2000 Hz, *do* 4000 Hz.

Примећујемо да прираст фреквенције од ноте до ноте није исти, а човек тај прираст чује исто, као једну висину више.

Израчунајмо број октава у чујном опсегу:

Промена висине тона која одговара једној октави: $\Delta v_{oktave} = \log 2f - \log f = \log 2$

Висине које одговарају границама опсега чујења:

$$\begin{aligned} v_2(20000\text{Hz}) &= \log 20000 \\ v_1(20\text{Hz}) &= \log 20 \end{aligned}$$

$$\Delta v_{cujnog\ opsega} = \log 20000 - \log 20 = \log 1000 = 3$$

$$\text{Број октава: } n = \frac{\Delta v_{cujnog\ opsega}}{\Delta v_{oktave}} = \frac{3}{\log 2} \cong 10$$

Дакле, имамо 10 октава у чујном опсегу, тј. требало би да имамо 10 нота, међутим инструменти обично имају опсег 7 октава (највиши и најнижи тонови се не користе у музици).

Октаве се деле на 12 полутонова.

$$\text{Промена висине једног полутона: } \Delta v_{polutona} = \frac{\Delta v_{oktave}}{12} = \frac{\log 2}{12} = \log \sqrt[12]{2}$$

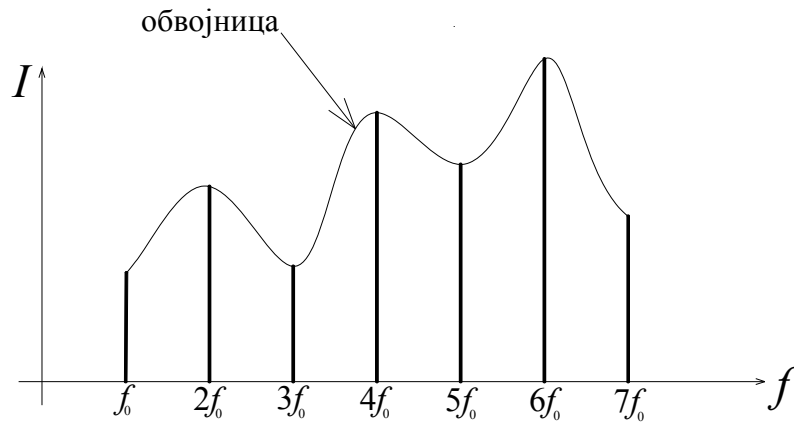
$$\log \frac{f_{gornje}}{f_{donje}} = \log \sqrt[12]{2} \quad \Rightarrow \quad 10^{\log \frac{f_{gornje}}{f_{donje}}} = \sqrt[12]{2} \cong 1.06$$

\Rightarrow Горња фреквенција полутона је за 6% већа од доње. Тај пораст фреквенције за 6% на музичкој скали представља један полутон.

Акорд је мешавина два тона и нема своју висину јер фреквенције у спектру нису еквидистантне.

Боја тона

Везује се за изглед спектра тона, тачније за обвојницу (анвелопу). Наиме, ако спојимо врхове линија у спектру добићемо обвојницу. Њен облик утиче на доживљај боје тона.



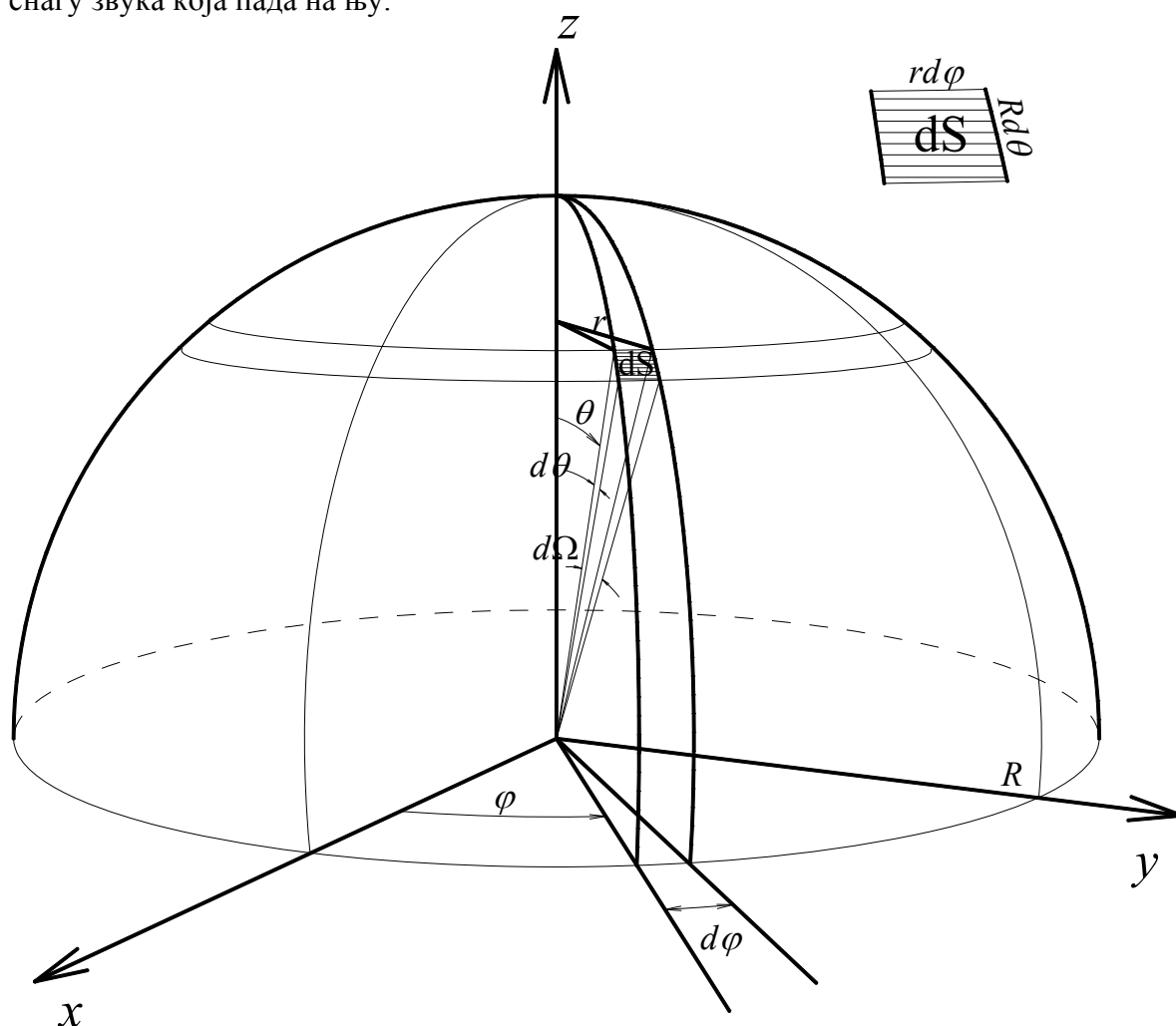
Ако два инструмента одсвирају исти тон истог интензитета, добија се исти распоред фреквенција, али интензитети појединих фреквенција нису исти, што даје различите обвојнице па се тонови разликују.

Време реверберације

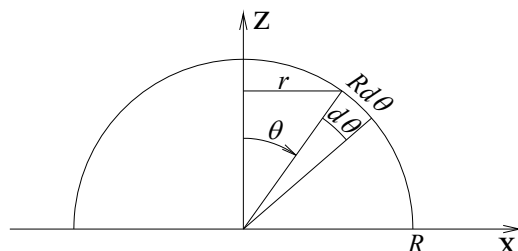
Дефинишемо време реверберације као интервал у коме снага звучног поља опадне милион пута. Изводимо формулу за време реверберације просторије у којој објекти имају малу апсорпцију звука. Звучно поље је због тога дифузно и хомогено, што значи да звук на неку површину пристиже из свих праваца и настао је вишеструким одбијањем од предмета.

У просторији делује звучни извор средње снаге P_i . Када почне да ради, емитује звучни енергију која расте у просторији, али и нестаје апсорпцијом. Апсорпција је сразмерна снази звука. Дакле, у једном тренутку се успостави равнотежа између емисије и апсорпције. Под тим условима изводимо ову формулу.

Посматрамо јако малу површину у околини координатног почетка и одређујемо укупну снагу звука која пада на њу.



На слици је замишљена полусфера, са елементарним просторним углом $d\Omega$ који представља правац (левак) дуж ког пристиже звук из просторије и пада на површину S . $d\Omega$ исеца на површини сфере елементарну површ $dS = R d\theta \cdot r d\phi = R r d\theta d\phi$.

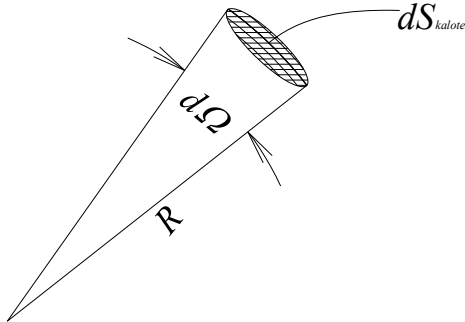


Из претпоставке о хомогености поља (што значи да је интензитет поља исти у свакој тачки) произилази следећа пропорција:

$$\frac{dI}{I} = \frac{d\Omega}{\Omega}$$

Тј. интензитет звука dI који пристиже дуж просторног угла $d\Omega$ се односе на исти начин као укупан интензитет и укупан угао.

Просторни угао се дефинише као количник површине сферне калоте и квадрата сфере.

$$d\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dS_{\text{kalote}}}{R^2}$$


Пошто је просторни угао бесконачно мали, имамо: $d\Omega = \frac{dS}{R^2} = \frac{Rr d\theta d\varphi}{R^2} = \frac{r}{R} d\theta d\varphi$

$$R \sin \theta = r$$

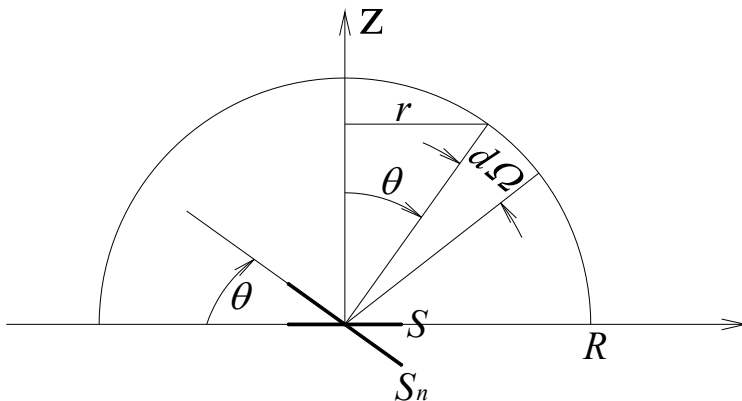
$$d\Omega = \frac{R \sin \theta}{R} d\theta d\varphi = \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\boxed{d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi}$$

Интензитет звука у физици се дефинише као количник звучне снаге и површине нормалног пресека кроз који та снага струји.

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P}{S} \quad \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

У нашем случају, снага је бесконачно мала: $S_n \cdot dI = dP$, $S_n = S \cos \theta$



S_n је површина нормална на правац звука.

$$d^2P = S_n dI = S \cos \theta dI = S \cos \theta \cdot I \cdot \frac{d\Omega}{\Omega} = SI \cdot \frac{\cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi}$$

Сада сабирамо интензитете звукова који пристижу на S дуж обода левка описаног са $\theta = \text{const.}$, што је еквивалентно интеграцији претходног израза по φ од 0 до 2π :

$$\int d^2P = \frac{SI}{4\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$dP = \frac{SI}{4\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \cdot 2\pi$$

$$\boxed{dP = \frac{SI}{2} \sin \theta \cos \theta d\theta} \quad - \text{Звучна снага која пристиже по омотачу левка на } S$$

Укупна звучна снага биће када проинтегралимо по свим „левцима“ што одговара интеграцији по θ од 0 до $\frac{\pi}{2}$.

$$P = \int dP = \frac{SI}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{SI}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin \theta d(\sin \theta) = \frac{SI}{2} \cdot \left. \frac{\sin^2 \theta}{2} \right|_0^{\pi/2} = \frac{SI}{4} (\sin^2 \frac{\pi}{2} - 0) = \frac{SI}{4}$$

$$\boxed{P = \frac{SI}{4}} \leftrightarrow \text{Снага која пристиже на } S \text{ из свих праваца.}$$

Одредимо израз за апсорбовану снагу у просторији (апсорпцију врше зидови и ствари; сваки материјал има свој коефицијент апсорпције α и површину S).

$$P_a = \sum_k \alpha_k P_k = \sum_k \alpha_k \frac{S_k I}{4} = \frac{I}{4} \underbrace{\sum_k \alpha_k S_k}_A = \frac{IA}{4}$$

P_k – звучна снага која пада на k – ти објект у просторији;

$\alpha_k P_k$ – апсорбована снага k – тог објекта;

$$\sum_k \alpha_k S_k = A \text{ – апсорпција просторије}$$

Сада поставимо једначину биланса звучне снаге у просторији:

Снага извора је P_i , апсорбована снага је P_a , па је тренутна снага звука у просторији:
 $P = P_i - P_a$.

Дакле имамо:

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = P_i - \frac{IA}{4}} \dots\dots\dots (*)$$

E – енергија звучног поља

$\frac{dE}{dt}$ – промена енергије по јединици времена

$$E = W \cdot V$$

W – густина енергије $[\frac{J}{m^3}]$

V – запремина просторије

E – укупна звучна енергија у просторији

$$\frac{dE}{dt} = V \cdot \frac{dW}{dt}, \quad W = \frac{I}{c}, \quad I - \text{интензитет; } c - \text{брзина}$$

$$\frac{dE}{dt} = V \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{I}{c} \right)$$

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \frac{V}{c} \cdot \frac{dI}{dt}}$$

Заменом у релацију (*) добијамо:

$$\boxed{\frac{V}{c} \cdot \frac{dI}{dt} = P_i - \frac{A}{4} \cdot I}$$

Решимо једначину по I . Ово је диференцијална једначина првог реда са константним коефицијентима, решавамо је раздвајањем променљивих.

$$\frac{dI}{4P_i - AI} = \frac{c}{4V} dt$$

$$\int_{I=0}^{I(t)} \frac{dI}{4P_i - AI} = \frac{c}{4V} \int_0^t dt$$

$$-\frac{1}{A} \int_{I=0}^{I(t)} \frac{d(4P_i - AI)}{4P_i - AI} = \frac{c}{4V} t$$

$$-\frac{1}{A} \ln(4P_i - AI) \Big|_0^I = \frac{c}{4V} t$$

$$\ln(4P_i - AI) - \ln 4P_i = -\frac{Ac}{4V} t$$

$$\ln \frac{4P_i - AI}{4P_i} = -\frac{Ac}{4V} t$$

$$\ln \frac{4P_i - AI}{4P_i} = -\frac{Ac}{4V}t$$

$$e^{\ln \frac{4P_i - AI}{4P_i}} = e^{-\frac{Ac}{4V}t}$$

$$1 - \frac{A}{4P_i}I = e^{-\frac{Ac}{4V}t}$$

$$I(t) = \frac{4P_i}{A} \left(1 - e^{-\frac{Ac}{4V}t} \right)$$

-промена интензитета звука од тренутка укључења $t = 0$.

После довољно дуго времена, интензитет звука у просторији је:

$$I = \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \frac{4P_i}{A}, \quad (e^{-\infty} \rightarrow 0)$$

То „дуго“ време је делић секунде јер звук брзо путује, што значи да се врло брзо успоставља константан интензитет:

$$I = \frac{4P_i}{A}$$

Сада нас интересује како се мења интензитет звука у просторији када искључимо извор.

$$\text{Нека је у тренутку } t = 0 : I(0) = \frac{4P_i}{A}.$$

Једначина биланса снаге гласи: $P = -P_a, (P_i = 0)$.

Дакле имамо:

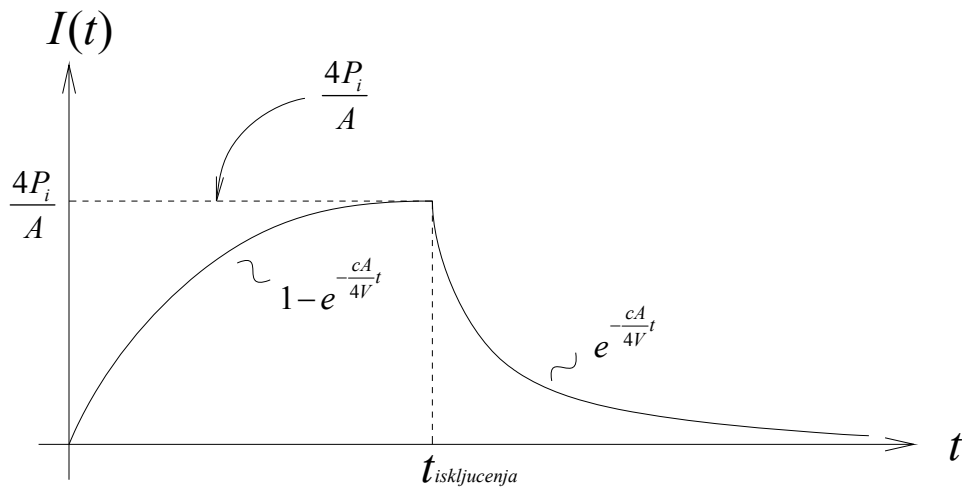
$$\frac{V}{c} \cdot \frac{dI}{dt} = -\frac{A}{4}I$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{cA}{4V}dt$$

$$\int_{\frac{4P_i}{A}}^I \frac{dI}{I} = -\frac{cA}{4V} \int_0^t dt$$

$$\ln I - \ln \frac{4P_i}{A} = -\frac{cA}{4V}t$$

$$I(t) = \frac{4P_i}{A} \cdot e^{-\frac{cA}{4V}t}$$



Сада можемо да одредимо време реверберације (одјека):

$$\frac{I(0)}{10^6} = \frac{4P_i}{A} \cdot e^{-\frac{cA}{4V}T}, \quad T - \text{време реверберације}$$

Дакле, кад t буде T , сматраћемо да је интензитет опао на милионити део од $I(0)$.

$$\frac{4P_i}{A} \cdot 10^{-6} = \frac{4P_i}{A} \cdot e^{-\frac{cA}{4V}T}$$

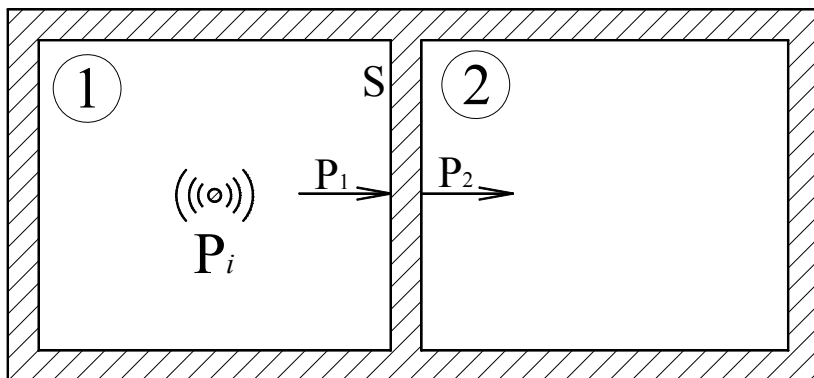
$$-6 \ln 10 = -\frac{cA}{4V}T$$

$$T = \frac{24 \ln 10}{c} \cdot \frac{V}{A}, \quad c \approx 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$T = 0.165 \cdot \frac{V}{A}$$

Преношење буке

Посматрамо две затворене просторије које дели преградни зид површине S чији је коефицијент трансмисије буке T . У просторији постоји извор буке средње снаге P_i .



Интересује нас бука у просторији (2).

Звучна снага која пада на преградни зид површине S износи:

$$P_1 = \frac{SI_1}{4}, \quad I_1 = \frac{4P_i}{A_1}$$

I_1 – интензитет буке у просторији (1)

A_1 – апсорпција просторије (1)

У другој просторији се чује само део те буке:

$$P_2 = TP_1$$

P_2 – снага звука који прелази у другу просторију кроз зид

$$P_2 = \frac{TS}{A_1} P_i$$

Дефинишемо звучну изолованост D као разлику нивоа буке у првој и другој просторији:

$$D = \Lambda_1 - \Lambda_2 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} - 10 \log \frac{I_2}{I_0}$$

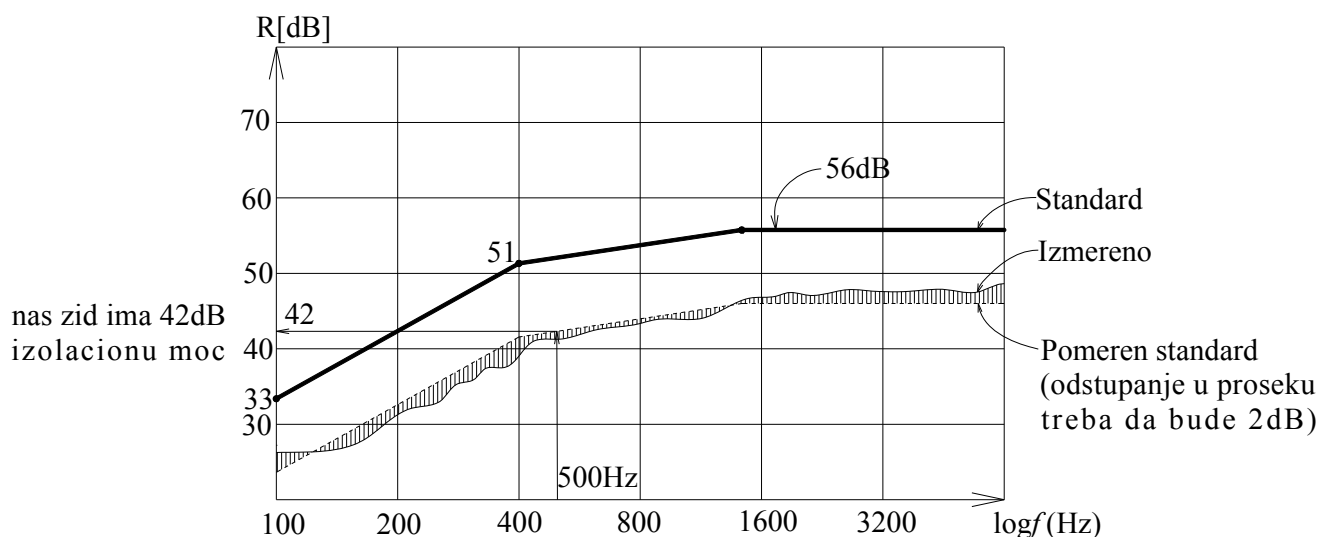
$$D = 10 \log \frac{I_1}{I_2} = 10 \log \frac{\frac{4P_i}{A_1}}{\frac{P_2}{A_2}} = 10 \log \frac{\frac{4P_i}{A_1}}{\frac{TS}{A_1} P_i} = 10 \log \frac{1}{T} - 10 \log \frac{A_2}{S}$$

$$D = R - 10 \log \frac{A_2}{S}, \quad R = 10 \log \frac{1}{T}$$

R – изолациона моћ зида

Бука у просторији (2) зависи од апсорпције те просторије и површине преградног зида.

Према стандардима из акустике звучна изолација зидова у становима је дата на слици:

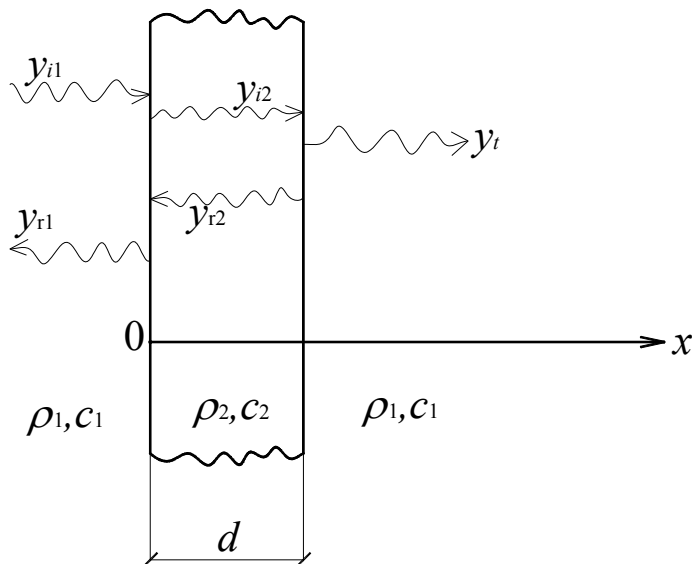


При експерименталним мерењима изолационе моћи зида за звуке различитих фреквенција добија се тзв. експериментална крива која грубо подсећа на ону из стандарда. Да би проценили меру пригушења звука просторије, крива из стандарда се помера транслаторно наниже до експерименталне, али тако да је разлика између њих у просеку $2dB$.

Вредност за R на помереној криви за стандард при фреквенцији 500 Hz представља меру изолационе моћи зида.

Коефицијент трансмисије звука равног зида

Посматрамо хомоген раван зид и звучни талас који под правим углом пада на њега. Са леве стране имамо упадни и рефлектовани талас а са десне пропуштени.



Изводимо формулу за коефицијент трансмисије звука T .

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P_t}{P_i}$$

P_t – звучна снага која је прошла кроз зид

P_i – звучна снага која пада на зид

$$T < 1$$

Ако уведемо координатни систем, једначине таласа на слици су:

$$y_{i1}(x, t) = y_{0i1} \sin(\omega t - k_1 x)$$

$$y_{r1}(x, t) = y_{0r1} \sin(\omega t + k_1 x)$$

$$y_{i2}(x, t) = y_{0i2} \sin(\omega t - k_2 x)$$

$$y_{r2}(x, t) = y_{0r2} \sin(\omega t + k_2 x)$$

$$y_t(x, t) = y_{0t} \sin(\omega t - k_1(x - d))$$

Да би поједноставили математичку анализу, реалне таласе представимо у комплексном облику:

$$y_{i1} = y_{0i1} e^{j(\omega t - k_1 x)} = y_{0i1} e^{-jk_1 x} e^{j\omega t}$$

$$y_{r1} = y_{0r1} e^{j(\omega t + k_1 x)} = y_{0r1} e^{jk_1 x} e^{j\omega t}$$

$$y_{i2} = y_{0i2} e^{j(\omega t - k_2 x)} = y_{0i2} e^{-jk_2 x} e^{j\omega t}$$

$$y_{r2} = y_{0r2} e^{j(\omega t + k_2 x)} = y_{0r2} e^{jk_2 x} e^{j\omega t}$$

$$y_t = y_{0t} e^{j(\omega t - k_1(x-d))} = y_{0t} e^{-jk_1(x-d)} e^{j\omega t}$$

Лево од зида, ($x \leq 0$) имамо два таласа који чине један резултујући y_1 :

$$y_1 = y_{i1} + y_{r1} = (y_{0i1} e^{-jk_1 x} + y_{0r1} e^{jk_1 x}) e^{j\omega t}, \quad x \leq 0$$

У зиду ($0 \leq x \leq d$):

$$y_2 = y_{i2} + y_{r2} = (y_{0i2} e^{-jk_2 x} + y_{0r2} e^{jk_2 x}) e^{j\omega t}, \quad 0 \leq x \leq d$$

Десно од зида ($x \geq d$):

$$y_t = y_{0t} e^{-jk_1(x-d)} e^{j\omega t}, \quad x \geq d$$

Сада имамо граничне услове за повезивање ових таласа:

У $x = 0$ таласи y_1 и y_2 су исти:

$$y_1(x=0) = y_2(x=0)$$

$$\boxed{y_{0i1} + y_{0r1} = y_{0i2} + y_{0r2}} \dots\dots\dots (1)$$

У $x = d$ таласи y_2 и y_t су исти:

$$y_2(x=d) = y_t(x=d)$$

$$\boxed{y_{0i2} e^{-jk_2 d} + y_{0r2} e^{jk_2 d} = y_{0t}} \dots\dots\dots (2)$$

Сада повезујемо притиске у $x = 0$ и $x = d$ ових таласа:

У $x = 0$ (лево од зида):

$$p_1(x=0) = p_2(x=0)$$

$$\underline{p_1} = E_{y1} \cdot \underbrace{\frac{dy_{i1}}{dx}}_{\text{pritisak incidentnog}} + E_{y1} \cdot \underbrace{\frac{dy_{r1}}{dx}}_{\text{pritisak reflektovanog}}$$

$$\underline{p_1} = E_{y1} (y_{0i1} (-jk_1) e^{-jk_1 x} + y_{0r1} (jk_1) e^{jk_1 x}) e^{j\omega t}$$

$$\underline{p}_1 = \rho_1 c_1^2 j \frac{\omega}{c_1} \left(-y_{0i1} e^{-jk_1 x} + y_{0r1} e^{jk_1 x} \right) e^{j\omega t}$$

$$\underline{p}_1 = j\rho_1 c_1 \omega \left(-y_{0i1} e^{-jk_1 x} + y_{0r1} e^{jk_1 x} \right) e^{j\omega t} \quad \text{-притисак лево од зида у комплексном облику}$$

Аналогно, у зиду:

$$\underline{p}_2 = j\rho_2 c_2 \omega \left(-y_{0i2} e^{-jk_2 x} + y_{0r2} e^{jk_2 x} \right) e^{j\omega t}$$

Притисак трансмитованог таласа:

$$\underline{p}_t = -j\rho_1 c_1 \omega \cdot y_{0t} e^{-jk_1(x-d)} e^{j\omega t}$$

Сада у $x = 0$ имамо:

$$-y_{0i1} + y_{0r1} = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} (-y_{0i2} + y_{0r2}) \quad \dots\dots\dots (3)$$

За $x = d$:

$$\underline{p}_2(x = d) = \underline{p}_t(x = d)$$

$$j\rho_2 c_2 \omega \left(-y_{0i2} e^{-jk_2 d} + y_{0r2} e^{jk_2 d} \right) = -j\rho_1 c_1 \omega y_{0t}$$

$$-y_{0i2} e^{-jk_2 d} + y_{0r2} e^{jk_2 d} = -\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} y_{0t} \quad \dots\dots\dots (4)$$

(1) – (3):

$$2y_{0i1} = \left(1 + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \right) y_{0i2} + \left(1 - \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \right) y_{0r2}$$

(2) – (4):

$$2y_{0i2} e^{-jk_2 d} = \left(1 + \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \right) y_{0t}$$

$$y_{0i1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \right) y_{0i2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \right) y_{0r2}$$

$$y_{0t} = \frac{2y_{0i2} e^{-jk_2 d}}{1 + \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}} \quad \dots\dots\dots (*)$$

$$\frac{y_{0i1}}{y_{0t}} = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} + \left(1 - \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \right) \frac{y_{0r2}}{y_{0i2}} \right] \cdot \left(1 + \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \right) \cdot e^{jk_2 d} \dots\dots\dots (**)$$

(2) + (4) :

$$2y_{0r2}e^{jk_2 d} = \left(1 - \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \right) y_{0t}$$

$$\frac{y_{0r2}}{y_{0t}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \right) e^{-jk_2 d}$$

Када искористимо релацију (*) имаћемо:

$$\frac{\frac{y_{0r2}}{2y_{0i2}e^{-jk_2 d}}}{1 + \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \right) e^{-jk_2 d}$$

$$\frac{y_{0r2}}{y_{0i2}} = \frac{1 - \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}}{1 + \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}} e^{-2jk_2 d}$$

Заменом овог односа у израз (**) добијамо:

$$\frac{y_{0i1}}{y_{0t}} = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} + \left(1 - \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \right) \cdot \frac{1 - \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}}{1 + \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}} \cdot e^{-2jk_2 d} \right] \cdot \left(1 + \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \right) \cdot e^{jk_2 d}$$

$$\frac{y_{0i1}}{y_{0t}} = \frac{1}{4} \left[\left(1 + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \right) \cdot \left(1 + \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \right) \cdot e^{jk_2 d} + \left(1 - \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \right) \cdot \left(1 - \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \right) \cdot e^{-jk_2 d} \right]$$

$$\frac{y_{0i1}}{y_{0t}} = \frac{1}{4} \left[\left(1 + \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} + 1 \right) \cdot e^{jk_2 d} + \left(1 - \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} - \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} + 1 \right) \cdot e^{-jk_2 d} \right]$$

$$\frac{y_{0i1}}{y_{0t}} = \frac{1}{4} \left[\left(2 + \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \right) \cdot e^{jk_2 d} + \left(2 - \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \right) \right) \cdot e^{-jk_2 d} \right]$$

$$\frac{y_{0i1}}{y_{0t}} = \frac{1}{4} \left[2 \cdot (e^{jk_2 d} + e^{-jk_2 d}) + \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \right) \cdot (e^{jk_2 d} - e^{-jk_2 d}) \right]$$

$$\frac{y_{0i1}}{y_{0t}} = \frac{e^{jk_2 d} + e^{-jk_2 d}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \right) \cdot \frac{e^{jk_2 d} - e^{-jk_2 d}}{2j} \cdot j$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2}$$

$$\frac{y_{0i1}}{y_{0t}} = \underbrace{\cos k_2 d}_{\text{Re}} + j \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \right)}_{\text{Im}} \sin k_2 d$$

Пошто у изразу за коефицијент трансмисије фигурише однос реалних амплитуда, а не комплексних, потребно је из последњег изрази одредити тај однос:

$$\frac{y_{0i1}}{y_{0t}} = \left| \frac{y_{0i1}}{y_{0t}} \right| = \sqrt{\text{Im}^2 \left\{ \frac{y_{0i1}}{y_{0t}} \right\} + \text{Re}^2 \left\{ \frac{y_{0i1}}{y_{0t}} \right\}}$$

$$\frac{y_{0i1}}{y_{0t}} = \sqrt{\cos^2 k_2 d + \frac{1}{4} \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \right)^2 \sin^2 k_2 d}$$

Дакле, имамо да је коефицијент трансмисије:

$$T = \left(\frac{y_{0t}}{y_{0i1}} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 k_2 d + \frac{1}{4} \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \right)^2 \sin^2 k_2 d}$$

У практичним применама имамо да је: $k_2 d \ll 1$

$$k_2 = \frac{\omega}{c_2}, \quad c_2 - \text{брзина звука у зиду}$$

За бетон та брзина износи $3500 \frac{m}{s}$.

Ако је зид танак онда је заиста $k_2 d \ll 1$.

Под том претпоставком имамо:

$$\sin^2 k_2 d \approx k_2^2 d^2$$

$$\cos^2 k_2 d \approx 1$$

$$\rho_2 c_2 \gg \rho_1 c_1$$

Под овим апроксимацијама коефицијент трансмисије постаје:

$$T \cong \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \right)^2 k_2^2 d^2}$$

$$T = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\rho_2 c_2 k_2 d}{\rho_1 c_1} \right)^2}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c_2}, \quad \rho_2 d = \frac{m_{zida}}{S} = m_s \quad (m_s - \text{површинска маса зида})$$

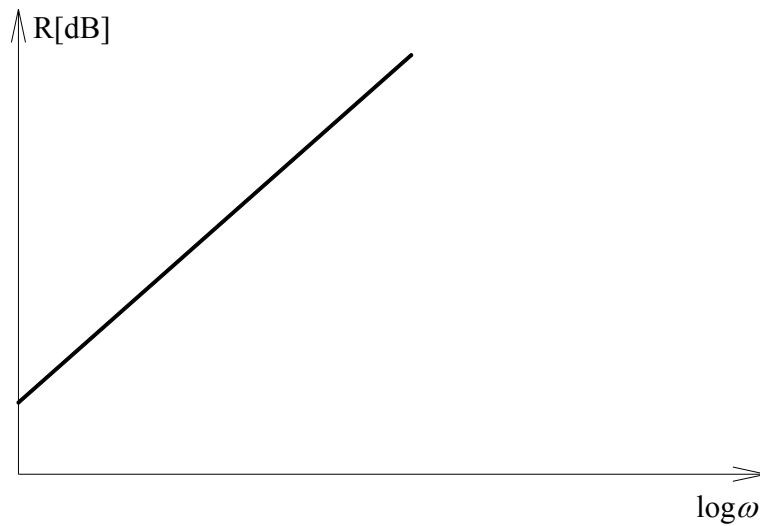
$$T = \frac{1}{1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{m_s \omega}{\rho_1 c_1} \right)^2}_{\gg 1}} \cong \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{m_s \omega}{\rho_1 c_1} \right)^2}$$

$$T = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{m_s \omega}{\rho_1 c_1} \right)^2}$$

Изолациона моћ зида:

$$R = 10 \log \frac{1}{T} = 20 \log \frac{m_s \omega}{2 \rho_1 c_1}$$

Изолациона моћ зида директно зависи од површинске масе зида.



Масивнији зид има бољу изолациону моћ.

На пример:

Зид од 6cm лаког бетона површинске масе $110\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ има пригушење 35dB .

Гипсана плоча дебљине 10cm површинске масе $105\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ има пригушење 36dB .

Пуна опека дебљине 11.5cm површинске масе $270\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ има пригушење 47dB .

Пригушење звука за прозоре и врата:

Једнострука врата: $20 - 25\text{dB}$, као и једноструки прозор.

Дупла врата: $30 - 40\text{dB}$.

Дупли прозори: $30 - 35\text{dB}$.

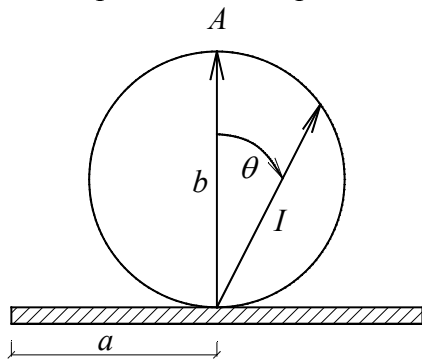
ФОТОМЕТРИЈА

Електрично осветљење

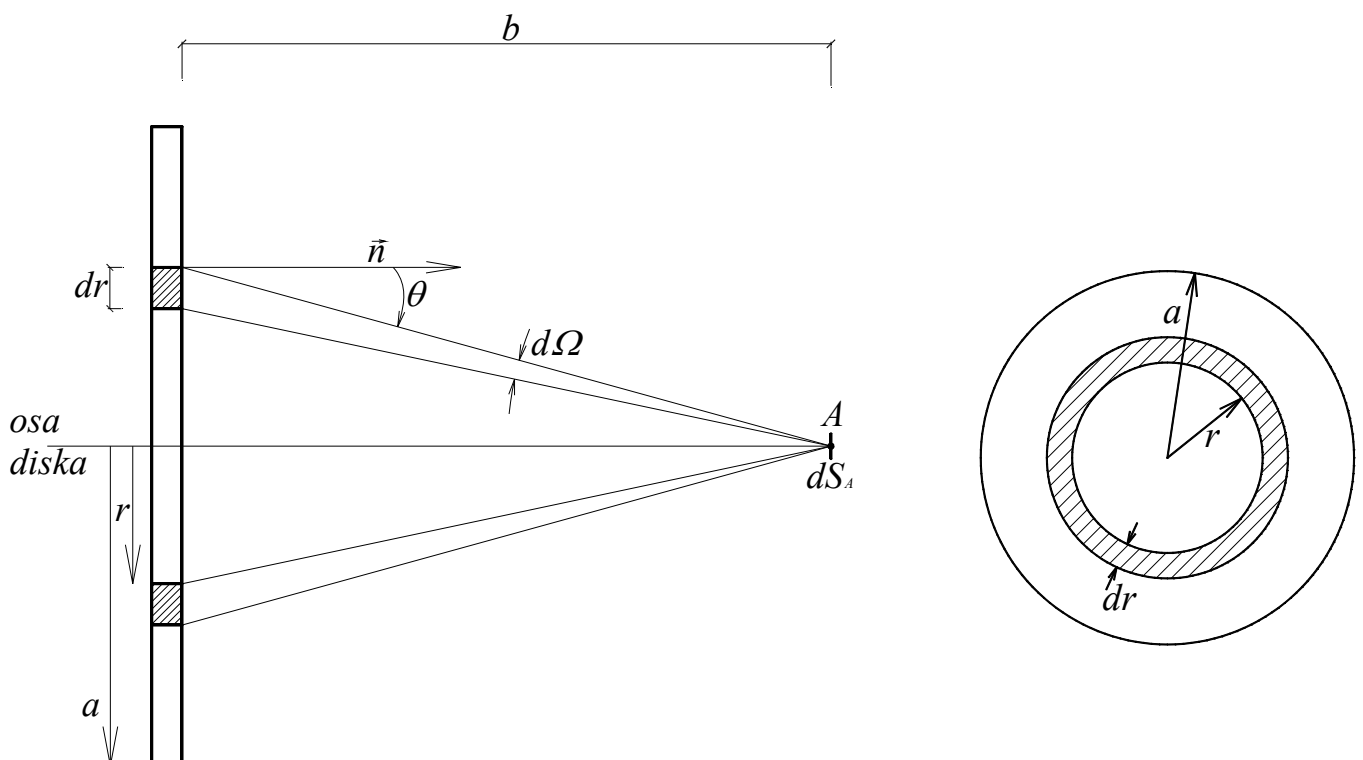
Већ смо дефинисали спектралне зрачне величине, а сада описујемо светлосне изворе коначних димензија.

Светлосни извор коначних димензија

Посматрајмо светлосни извор у виду танког диска. Извор је савршено дифузан, што значи да зрачи по Ламберовом закону, тј.: $I(\theta) = I_0 \cos \theta$.



Изводимо израз за осветљеност коју ствара овакав извор на оси диска, на растојању b од његовог центра, у околини тачке A која се налази на поменутој оси у равни нормалној на њу (слика).



Најпре израчунавамо осветљеност која потиче са бесконачно малог дела диска. За елемент површине узимамо бесконачно танак прстен, полупречника r и дебљине dr , површине $dS = 2\pi r dr$. Светлост се исијава са мале површине диска.

По дефиницији осветљеност је количник флукса Φ и површине на коју пада dS_A .

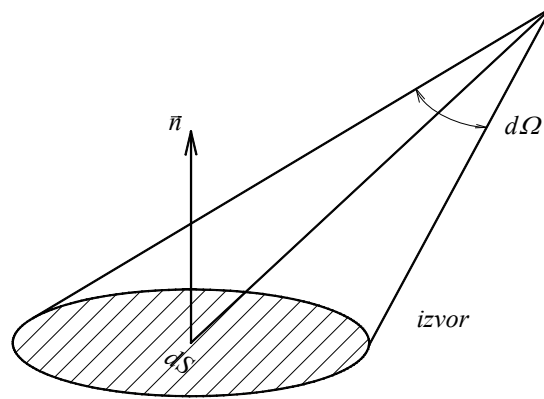
$$dE \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\Phi}{dS_A} = \frac{dI \cdot d\Omega}{dS_A}$$

$$dE = \frac{dI \cdot \frac{dS_n}{R^2}}{dS_A} = \frac{dI \cdot \frac{dS_A \cos \theta}{R^2}}{dS_A}$$

$$\boxed{dE = \frac{dI \cos \theta}{R^2}}$$

Сјај је по дефиницији количник интензитета светлости који тачкасти извор израчи у бесконачно мали просторни угао дуж правца који заклапа угао θ на површ извора.

$$\boxed{B \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dI}{dS \cos \theta}}$$



Ако изразимо интензитет светлости преко сјаја B :

$$dE = \frac{B dS \cos^2 \theta}{R^2}, \quad dI = B dS \cos \theta$$

$$dE = \frac{B \cdot 2\pi r dr \cos^2 \theta}{R^2}$$

$$R = \frac{b}{\cos \theta}$$

$$r = b \tan \theta, \quad dr = b d(\tan \theta) = b \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$dE = \frac{B \cdot 2\pi \cdot b \tan \theta \cdot b \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \cdot \cos^2 \theta}{\left(\frac{b}{\cos \theta}\right)^2}$$

$$\boxed{dE = 2\pi B \sin \theta \cos \theta d\theta}$$

- Осветљеност у околини тачке A која потиче од светлости са бесконачно танког прстена диска полупречника r .

Укупна осветљеност з тачки A биће сума доприноса свих прстенова од $r = 0$ до $r = a$.

Ових прстенова има бесконачно много јер су бесконачно танки (дебљине dr).

Сума прелази у интеграл:

$$E = \int dE = 2\pi B \int_{\theta=0}^{\theta_{\max}} \underbrace{\sin \theta \cos \theta}_{d(\sin \theta)} d\theta$$

$$E = 2\pi B \int_{\theta=0}^{\theta_{\max}} \sin \theta d(\sin \theta) = 2\pi B \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{\theta_{\max}}$$

$$E = \pi B \sin^2 \theta_{\max}$$

$$E = \pi B \left(\frac{a}{R} \right)^2$$

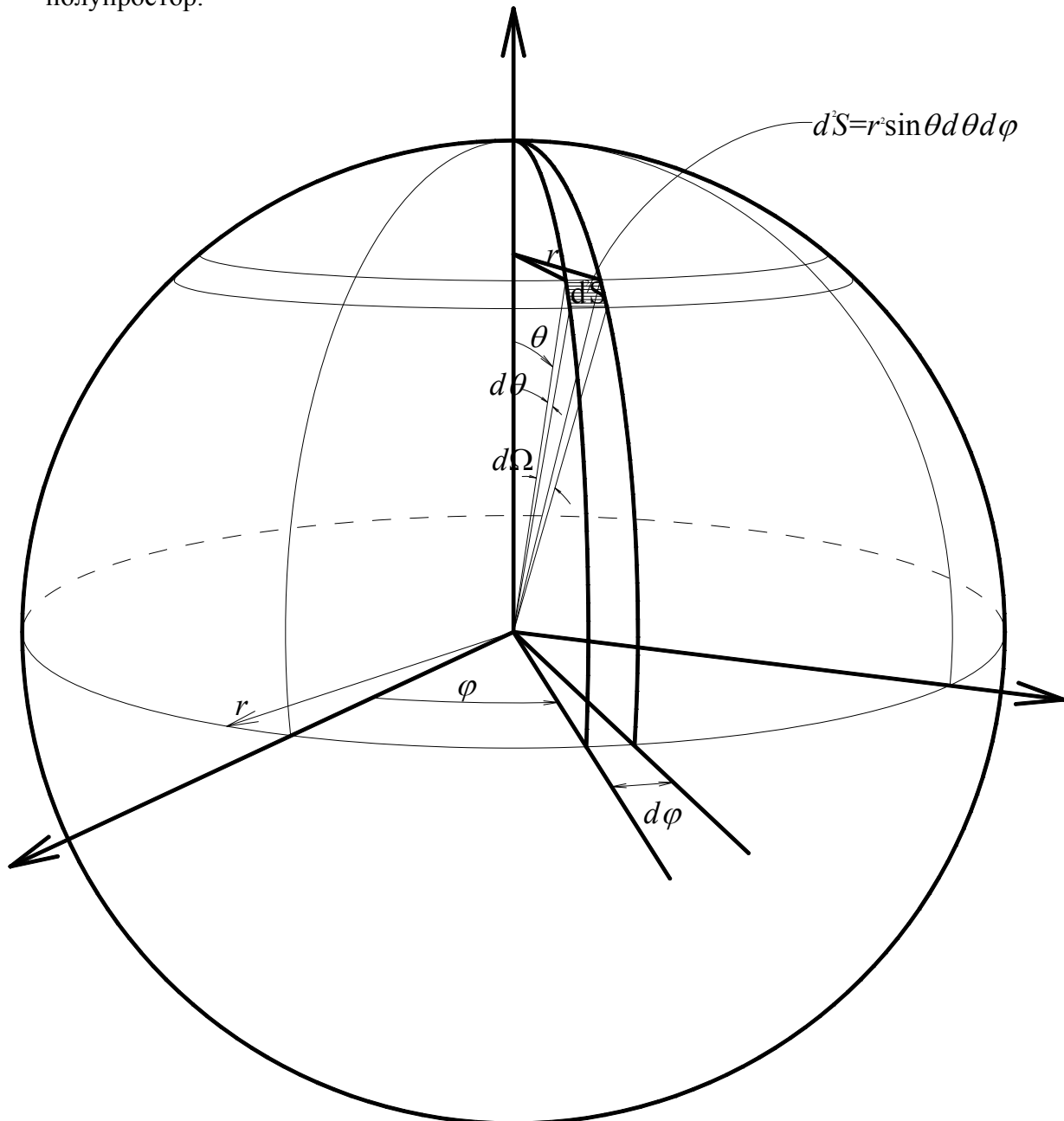
$$E = \pi B \frac{a^2}{a^2 + b^2}$$

$$\boxed{E = \frac{\pi B}{1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2}}$$

За случај $b \gg a$, добијамо $E = \pi B$, а то је осветљеност коју даје тачкасти извор, па се у овим случајевима за диск може сматрати да је тачкасти извор светлости.

Јачина светлости дифузног сферног извора

Одредимо колики интензитет светлости емитује сферни извор полупречника r у полупростор.



Извор је савршено дифузан (Сјај у свакој тачки му је константан).

Интензитет светлости који потиче са површине d^2S је бесконачно мали и износи:

$$dI = B d^2S \cos \theta$$

$$dI = B r^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi$$

$$I = \int dI = Br^2 \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$I = Br^2 \cdot 2\pi \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \sin \theta d(\sin \theta)$$

$$I = Br^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{\sin^2 \theta}{2} \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I = Br^2 \pi \left(\sin^2 \frac{\pi}{2} - \sin^2 0 \right)$$

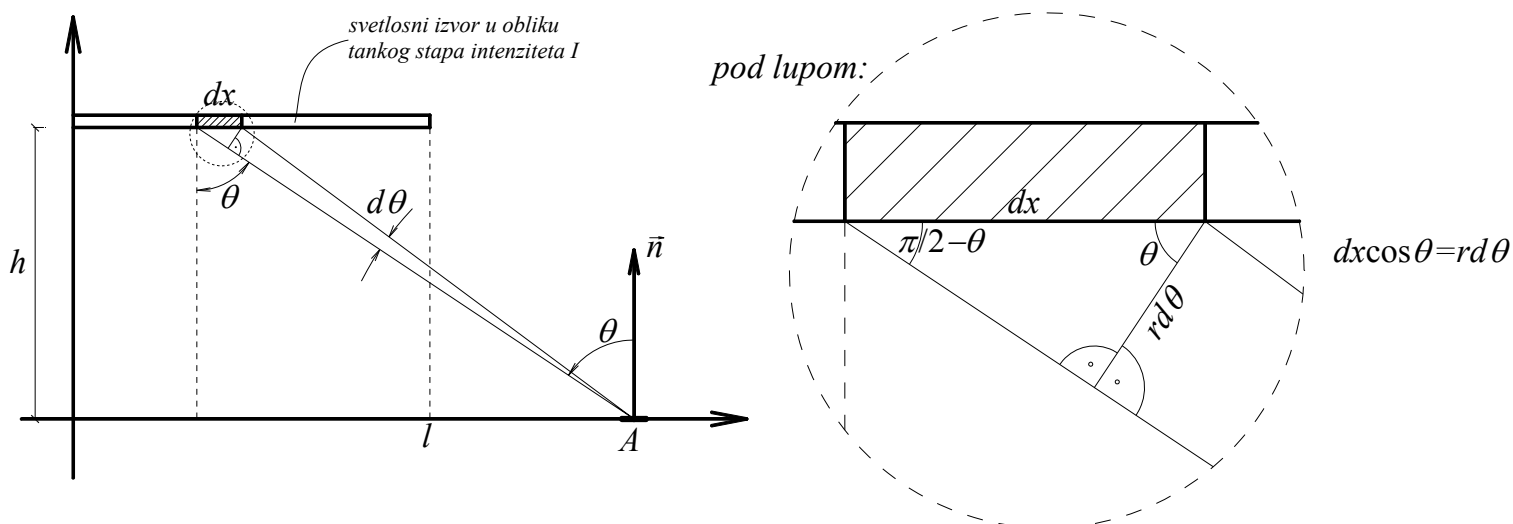
$$\boxed{I = Br^2 \pi}$$

$$I = SB, \quad S = \pi r^2, \quad (S - \text{површина пресека лопте по екватору})$$

Значи, сферни извор светлости можемо заменити диском полупречника сфере.

Штап коначне дужине као светлосни (хомоген) извор

Посматрамо штап, дужине l , као хомоген светлосни извор и интересује нас осветљеност тачке A у вертикалној равни испод њега (као на слици):



Полазимо од израза за осветљеност тачкастог светлосног извора дужине dx у тачки A :

$$dE_A = \frac{dI \cos \theta}{r^2}$$

dI – интензитет светлости са дела штапа дужине dx

Пошто је штап хомоген светлосни извор важи пропорција: $\frac{I}{l} = \frac{dI}{dx}$

$$dI = \frac{I}{l} dx$$

$$dE_A = \frac{I \cos \theta dx}{l r^2}$$

Допринос свих делића штапа осветљености ће бити интеграл последњег израза. Интеграцију спроводимо по углу θ , јер се добија таблични интеграл (ако би „ишли“ преко x имали би тежи интеграл за решавање).

$$r \cos \theta = h \quad \Rightarrow \quad r = \frac{h}{\cos \theta}$$

За изражавање dx преко угла θ уочимо троугао чија је хипотенуза dx , имамо:

$$dx \cos \theta = rd\theta \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{rd\theta}{\cos \theta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{dx = \frac{hd\theta}{\cos^2 \theta}}$$

Сада имамо:

$$dE_A = \frac{I}{l} \cdot \frac{\cos \theta dx}{r^2} = \frac{I}{l} \cdot \frac{\cos \theta \cdot \frac{h}{\cos^2 \theta}}{\frac{h^2}{\cos^2 \theta}} d\theta = \frac{I}{l} \cdot \frac{\cos \theta}{h} d\theta$$

$$dE_A = \frac{I}{lh} \cos \theta d\theta$$

$$E_A = \int dE_A = \frac{I}{lh} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta$$

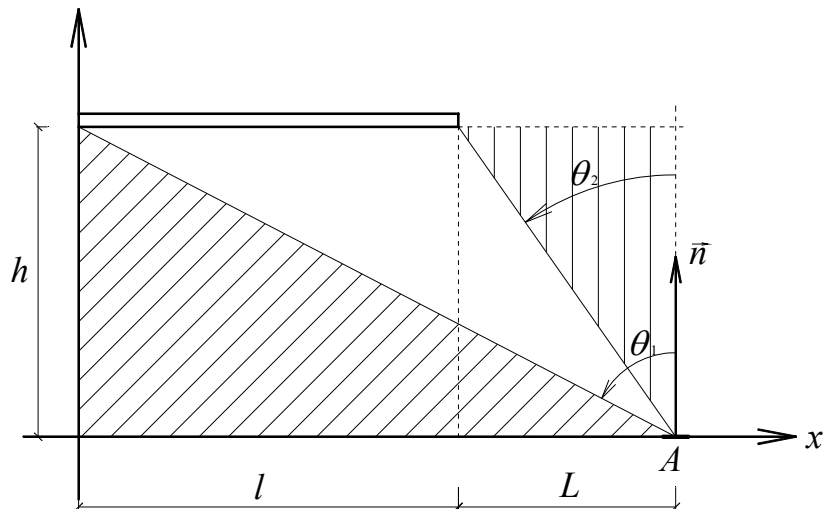
$$E_A = \frac{I}{lh} \sin \theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\boxed{E_A = \frac{I}{lh} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)}$$

Са слике имамо:

$$\sin \theta_1 = \frac{L+l}{\sqrt{h^2 + (L+l)^2}}$$

$$\sin \theta_2 = \frac{L}{\sqrt{h^2 + L^2}}$$



Коначно је:

$$\boxed{E_A = \frac{I}{lh} \left(\frac{L}{\sqrt{h^2 + L^2}} - \frac{L+l}{\sqrt{h^2 + (L+l)^2}} \right)}$$

ТЕРМИКА	1
Термичко ширење.....	1
Линеарно ширење шипке.....	1
Термичко ширење плоче.....	1
Термичко ширење паралелопипеда	2
Термичко напрезање материјала.....	2
Реални гасови.....	3
Ендрјусове криве стања паре чисте супстанце.....	5
Одређивање коефицијената a и b у Ван дер Валсовој једначини стања паре.....	6
Латентне топлоте	8
Латентне топлоте	9
Специфична топлота топљења	9
Специфична топлота очвршћавања	9
Специфична топлота испаравања	9
Специфична топлота кондензовања	9
Клаузијус - Клапејронова једначина.....	10
Транспорт топлоте.....	13
Температурско поље	13
Фуријеов закон провођења топлоте.....	14
Провођење топлоте кроз раван хомоген зид.....	15
Вишеслојни раван зид	16
Провођење топлоте кроз цилиндричан зид.....	19
Вишеслојни цилиндрични зид.....	20
Провођење топлоте кроз сферичан (сферни) зид	21
Вишеслојни сферични зид	22
Прелаз топлоте.....	23
Пролаз топлоте.....	24
Пролаз топлоте кроз цилиндричан зид.....	26
Пролаз топлоте кроз сферичан (сферни) зид	27

Нестационарна Фуријеова једначина провођења топлоте	29
Размена топлоте зрачења	31
Планков закон	31
Винов закон померања	33
Емисиона моћ чврстих тела	33
Кирхофов закон зрачења	33
Размена топлоте зрачењем између две паралелне сиве површине	35
Зрачне величине	36
ДИФУЗИЈА	38
Први Фиков закон	38
Други Фиков закон	40
Дифузија водене паре кроз раван зид	42
Влага у зградама	45
Физичка адсорпција	45
Дифузија и кондензовање водене паре	46
ЗВУК	50
Субјективне и објективне карактеристике звука	50
Јачина звука	50
Висина звука	51
Боја тона	53
Време реверберације	54
Преношење буке	60
Коефицијент трансмисије звука равног зида	62
ФОТОМЕТРИЈА	69
Електрично осветљење	69
Светлосни извор коначних димензија	69
Јачина светлости дифузног сферног извора	72
Штап коначне дужине као светлосни (хомоген) извор	74