STEPENI REDOVI – ZADACI (I deo)

DEF: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n$ je stepeni red , ako stavimo $t-t_0=x$, dobijamo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$

Delimična suma reda je $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$; a n-ti ostatak je $R_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} x^{n+k}$

Ako postoji R tako da je $|x|<R$ onda taj red konvergira, a za $|x|>R$ divergira.

Interval (-R,R) je interval konvergencije reda .

konvergira

divergira **-R** **R** **divergira**

Za x=R i x=-R, radimo posebno , koristeći kriterijume za konvergenciju brojnih redova.

Košijeva formula: $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$

Korena formula: $\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$ to jest $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$

Važe sledeće teoreme: Neka je $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

1) $\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\lim_{x\to x_0} a_n x^n) = S(x_0)$

2) $\int_a^b (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)dx = \sum_{n=0}^{\infty} (\int_a^b a_n x^n dx)$

3) **Stepeni red se na intervalu konvergencije može diferencirati član po član**

RAZVOJI

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ gde je $(-\infty<x<\infty)$

$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $(-\infty<x<\infty)$

$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $(-\infty<x<\infty)$

$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n$, $-1<x<1$

$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, $-1<x<1$

$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $-1<x<1$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $-1<x<1$

$\frac{x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$

Primer 1.

Odrediti poluprečnik konvergencije i ispitati konvergenciju na krajevima intervala konvergencije za sledeće stepene redove:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

v) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1}$

Rešenja:

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

Ovde je $a_n = n+1$ pa ćemo iskoristiti **Košijevu formulu:** $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ **=R**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{1} = 1$$

Dobili smo da red konvergira u intervalu $(-1,1)$. Sad moramo ispitati za x = -1 i za x=1.

<u>za x = -1</u>

Ovu vrednost zamenimo u dati red : $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \to \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n$

Dobili smo alternativni red. Kako je $\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$ zaključujemo da ovde red divergira.

<u>za x = 1</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \to \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(1)^n = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)}$$

Ovaj brojni red takodje divergira, jer mu opšti član ne teži nuli: $\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$

Zaključak: Red $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ je konvergentan na intervalu $(-1,1)$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

Ovde je $a_n = \frac{1}{n}$ pa je zgodno opet koristiti Košijevu formulu :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{1} = 1$$

Dobili smo **R=1** pa za sada imamo da red konvergira na intervalu (- 1,1)

<u>za x = -1</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Ovo je alternativni red gde je $a_n = \frac{1}{n}$

Red je opadajući jer $n < n+1 \to \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \to a_n > a_{n+1}$ i opšti član teži nuli $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ pa po Lajbnicovom kriterijumu ovde red konvergira.

<u>za x = 1</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Za ovaj red još od ranije znamo da je divergentan (pogledaj prethodne fajlove o brojnim redovima)

Zaključak: Red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ je konvergentan na intervalu [-1,1)

www.matematiranje.com

v) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2+1}$

Kako je $a_n = \frac{2^n}{n^2+1}$ zgodno je probati Košijevu formulu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n}{n^2+1}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n} \cdot 2} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{n^2+2n+2}{n^2+1}}}_{teži\ 1} = \frac{1}{2}$$

Znači da red konvergira , za sad , u intervalu $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

za x = $-\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (-\frac{1}{2})^n}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \frac{(-1)^n}{2^n}}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

Dobili smo alternativni red kod koga je $a_n = \frac{1}{n^2+1}$.

Red je opadajući i opšti član teži nuli $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$ pa po Lajbnicovom kriterijumu ovaj red konvergira.

za x = $\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (\frac{1}{2})^n}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \frac{1}{2^n}}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Ovaj brojni red je takodje konvergentan (direktna upotreba reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$; ovaj red za k>1 konvergira, a za k$\leq$ 1 divergira)

Zaključak: Red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2+1}$ je konvergentan na intervalu $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Primer 2.

2) Odrediti poluprečnik konvergencije i ispitati konvergenciju na krajevima intervala konvergencije za sledeće stepene redove:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}x^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{2n}$

Rešenje:

Ovde ćemo koristiti drugu formulu za traženje poluprečnika konvergencije reda : $\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}x^n$

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

$$\frac{1}{R}=e\to\boxed{R=\frac{1}{e}}$$

Dakle, za sada znamo da ovaj red konvergira u intervalu $(-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$.

<u>Za x = $\frac{1}{e}$</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}(\frac{1}{e})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}$$

Proverimo najpre da li opšti član teži nuli:

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot n}\frac{1}{e^n}=\lim_{n\to\infty}e^n\frac{1}{e^n}=1$ Odavde zaključujemo da red divergira.

<u>Za x = -$\frac{1}{e}$</u>

Ovde se radi o alternativnom redu, ali sličnim načinom razmišljanja dolazimo do zaključka da i ovde red divergira.

Zaključak: red $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} x^n$ konvergira u intervalu $(-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{2n}$

Primenjujemi isti kriterijum:

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{2^n}=\overline{\lim_{n\to\infty}}2=2$$

$$\frac{1}{R}=2\to\boxed{R=\frac{1}{2}}$$

Šta ovde moramo voditi računa?

Pogledajmo zadati red $\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\left(x^2\right)^n$

Znači da se ovaj poluprečnik konvergencije odnosi na x^2 a na x će se odnositi:

$$R=\frac{1}{2} \text{ je za x}^2\to R=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ je za x}$$

Red dakle konvergira u intervalu $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Za $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ i $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ redovi će biti divergentni jer očigledno opšti član ne teži nuli.

Zaključak: red $\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{2n}$ konvergira u intervalu $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

www.matematiranje.com

STEPENI REDOVI – ZADACI (II deo)

Primer 1.

Funkciju $f(x) = arctgx$ razviti u stepeni red i odrediti njegovu oblast konvergencije.

Rešenje:

Ideja je da koristimo poznati razvoj $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad -1<x<1$

Dakle, ovde je $x^2 \in (-1,1) \to x \in (-1,1)$

Kako važi teorema $\int_a^b (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)dx = \sum_{n=0}^{\infty} (\int_a^b a_n x^n dx)$, to jest da na intervalu konvergencije integral prolazi kroz stepeni red, imamo:

$$f(x) = arctgx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n})dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \boxed{\int_0^x x^{2n}dx} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}$$

Uvek treba ispitati konvergenciju dobijenog reda na granicama intervala konvergencije.

Kod nas je to u ovom slučaju x = -1 i x = 1

Za x = -1

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \to za\ x=-1 \to \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \overbrace{\boxed{(-1)^{2n}}}^{ovo\ je\ 1} (-1)^1}{2n+1} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}}$$

Ovo je alternativni red i na njega ćemo primeniti Lajbnicov kriterijum:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0 \text{ i važi: } n+1 > n \to 2(n+1) > 2n \to 2(n+1)+1 > 2n+1 \to \frac{1}{2(n+1)+1} < \frac{1}{2n+1} \to \boxed{a_{n+1} < a_n}$$

Znači da je ovaj alternativni red konvergentan.

Za x = 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \to za\ x=1 \to \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1)^{2n+1}}{2n+1} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}}$$

Slično kao za prethodni brojni red i ovde je po Lajbnicovom kriterijumu red konvergentan.

Dakle, naš stepeni red je konvergentan za $x \in [-1,1]$

Primer 2.

Funkciju $f(x)=\ln\frac{2+x}{1-x}$ razviti u stepeni red.

Rešenje:

$$f(x)=\ln\frac{2+x}{1-x}$$

$$f`(x)=\frac{1}{\frac{2+x}{1-x}}\cdot\left(\frac{2+x}{1-x}\right)`=\frac{\cancel{1-x}}{2+x}\cdot\frac{1(1-x)+1(2+x)}{(1-x)^{\cancel{2}}}=\frac{3}{(2+x)(1-x)}$$

Dobili smo racionalnu funkciju koju ćemo poznatim postupkom rastaviti na sabirke:

$$\frac{3}{(2+x)(1-x)}=\frac{A}{2+x}+\frac{B}{1-x}\text{..............................}/\cdot(2+x)(1-x)$$

$$3=A(1-x)+B(2+x)$$

$$3=A-Ax+2B+Bx$$

$$3=x(-A+B)+A+2B$$

$$-A+B=0$$

$$\underline{A+2B=3}$$

$$3B=3\rightarrow\boxed{B=1}\rightarrow\boxed{A=1}$$

$$\frac{3}{(2+x)(1-x)}=\frac{1}{2+x}+\frac{1}{1-x}=\frac{1}{2(1+\frac{x}{2})}+\frac{1}{1-x}=\boxed{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+\frac{x}{2})}+\frac{1}{1-x}}$$

Iskoristićemo $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ $\quad -1<x<1$

$$\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\frac{1}{1-(-\frac{x}{2})}=\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^n$$

Poluprečnik konvergencije ovog reda je :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{2^n}\cdot 2}{\cancel{2^n}}=2$$ **,** znači $x\in(-2,2)$

Sada , za interval $x\in(-1,1)$ (koji pripada dobijenom intervalu $(-2,2)$) imamo:

$$f`(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}+\frac{1}{1-x}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\ x^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\cdot 2^n}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\ x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\ x^n$$

$$=\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^{n+1}}{2^{n+1}}x^n}$$

Sad da preko integrala vratimo funkciju na f(x).

$$f(x)=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^{n+1}}{2^{n+1}}x^n)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^{n+1}}{2^{n+1}}\int_0^x x^n d=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}=\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}x^{n+1}}$$

Primer 3.

Funkciju $f(x)=\frac{1+x}{(1-x)^3}$ razviti u stepeni red, a zatim odrediti zbir reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^{n-1}}$

Rešenje:

Opet moramo rastaviti datu funkciju.

$$\frac{1+x}{(1-x)^3}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{(1-x)^2}+\frac{C}{(1-x)^3}\text{...}/\cdot(1-x)^3$$

$$1+x=A(1-x)^2+B(1-x)+C$$

$$1+x=A(1-2x+x^2+B-Bx+C$$

$$1+x=A-2Ax+Ax^2+B-Bx+C$$

$$1+x=+Ax^2+x(-2A-B)+A+B+C$$

$$A=0$$

$$-2A-B=1$$

$$\underline{A+B+C=1}$$

$$B=-1\to C=2$$

$$\frac{1+x}{(1-x)^3}=\frac{0}{1-x}+\frac{-1}{(1-x)^2}+\frac{2}{(1-x)^3}=\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1-x)^2}$$

Dakle:

$$\boxed{f(x)=\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1-x)^2}}$$

Znamo da je $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \qquad -1<x<1$

Obeležimo sa $g(x) = \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$

Izvod je :

$$g`(x) = -\frac{1}{(1-x)^2}(1-x)` = -\frac{1}{(1-x)^2}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$g``(x) = -\frac{1}{(1-x)^4}((1-x)^2)` = -\frac{1}{(1-x)^4}2(1-x)(-1) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

Sad radimo:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = g`(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^{/} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$ Pazi: moramo promeniti da n ide od 1.

$$\frac{2}{(1-x)^3} = g``(x) = \left(g`(x)\right)` = \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\right)^{/} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

Pazi: moramo promeniti da n ide od 2, ali pošto prethodna suma ide od 1, izvršićemo malu korekciju za ovu drugu sumu, stavićemo da ide od 1, a gde vidimo *n* pišemo *n+1*

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+1-1)x^{n+1-2} = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1} = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}}$$

Sada se vraćamo na zadatak:

$$f(x) = g``(x) - g`(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}[n(n+1)-n]x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}[n^2+n-n]x^{n-1}$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}}$$

Da bi našli traženi zbir reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^{n-1}}$, trebamo umesto x u našem redu $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ staviti neki broj.

Ovde je očigledno da to treba biti $\dfrac{1}{2}$. Ovu vrednost menjamo u početnu , zadanu, funkciju:

$$f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3} \to f(\frac{1}{2}) = \frac{1+\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^3} = 12$$

Primer 4.

Odrediti oblast konvergencije i sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ a zatim naći sumu numeričkog reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2^n}$

Rešenje:

Kako je $a_n = n^2$ koristimo formulu $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ **=R**

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \frac{1}{1} = 1 \quad \textbf{dakle} \quad R=1$$

Red je konvergentan za $x \in (-1,1)$. Moramo ispitati šta se dešava za x = -1 i za x = 1

<u>Za x = 1</u>

Dobijamo brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 1^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2$. Ovde odmah možemo zaključiti da red divergira jer mu opšti član ne teži nuli: $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

<u>Za x = -1</u>

Slično razmišljamo: dobijeni red je $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (-1)^{n-1}$, ali i on divergira jer mu opšti član ne teži nuli.

Zaključujemo da oblast konvergencije ostaje $x \in (-1,1)$

Koristićemo poznati razvoj $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad -1<x<1.$

Pošto u našem redu n ide od 1 , napravićemo malu korekciju ($\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ sve pomnožimo sa x):

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \qquad x \in (-1,1)$$

Dalje radimo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot n\cdot \underbrace{\boxed{x}}_{\text{ide ispred}}\cdot x^{n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot \underbrace{\boxed{n\cdot x^{n-1}}}_{\text{ovo je izvod od } x^n} = x\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot (x^n)` = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^n\right)' =$$

Sad unutar zagrade radimo isti trik kao malopre:uzmemo x pa ispred zagrade

$$x\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^n\right)' = x\left(x\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1}\right)' = x\left(x\sum_{n=1}^{\infty} (x^n)`\right)' = x\left(x\left(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} x^n}_{\text{ovo zamenimo}}\right)'\right)' = x\left(x\left(\frac{x}{1-x}\right)'\right)'$$

E sad samo imamo posao da nadjemo ove izvode:

$$x\left(x\left(\frac{x}{1-x}\right)'\right)' = x\left(x\left(\frac{1-x+x}{(1-x)^2}\right)\right)' = x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = x\cdot\frac{(1-x)^2-2(1-x)(-1)x}{(1-x)^4} =$$

$$= x\frac{(1-x)^2+2(1-x)x}{(1-x)^4} = x\frac{\cancel{(1-x)}[1-x+2x]}{(1-x)^{\cancel{4}}} = x\frac{x+1}{(1-x)^3} = \boxed{\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}}$$

Sumu numeričkog reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{2^n}$ ćemo naći kada umesto x stavimo $-\frac{1}{2}$ u $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ odnosno u $\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{2^n} = \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}+1)}{(1-(-\frac{1}{2}))^3} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{27}{8}} = \boxed{-\frac{2}{27}}$$

Primer 5.

Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}x^n$ i na intervalu konvergencije naći njegovu sumu.

Rešenje:

Iz $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ **=R** dobijamo: $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = \frac{1}{1} = 1$

Odavde zaključujemo da red konvergira za $x\in(-1,1)$.

Za x = - 1

Dobijamo red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}(-1)^n$, ali je očigledno da njegov opšti član ne teži nuli , $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$ **pa red divergira.**

Za x = 1

Slična situacija, dobijamo red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$ čiji opšti član ne teži nuli , pa je red **divergentan.**

Zaključujemo da je oblast konvergencije datog reda interval $(-1,1)$.

Obeležimo sumu reda sa $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}x^n$

Najpre ćemo , na intervalu konvergencije, dati red integraliti da " uništimo" n+1, dakle:

$$\int_0^x f(x)dx=\int_0^x(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}x^n)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}\int_o^x x^n dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{n+1}}{n}\frac{x^{n+1}}{\cancel{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}$$

Izbacimo jedno x ispred: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

Odavde je dakle:

$$\int_0^x f(x)dx=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.../:x$$

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

Sad tražimo izvod od ovoga:

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\to\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx\right)^/=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)^/=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$$

Odavde je dakle $\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx\right)^/=\frac{1}{1-x}$

Da bi našli $\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx$ moramo integraliti $\frac{1}{1-x}$, pa dobijamo:

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln|1-x|\Big|_0^x=\boxed{-\ln|1-x|}$$

Odavde imamo:

$$\frac{1}{x}\int_{0}^{x} f(x)dx = -\ln|1-x| \text{.................................} /*x$$

$$\int_{0}^{x} f(x)dx = -x\ln|1-x|$$

Konačno će biti:

$$f(x) = \left(\int_{0}^{x} f(x)dx\right)^{/} = \underbrace{\left(-x\ln|1-x|\right)^{/}}_{izvod\ proizvoda} = -1\cdot\ln|1-x| + \frac{1}{1-x}(-1)(-x) = \boxed{-\ln(1-x) + \frac{x}{1-x}}$$

www.matematiranje.com

FURIJEOVI REDOVI – TEORIJA

Dirhleovi uslovi

Kaže se da funkcija f(x) ispunjava Dirihleove uslove u intervalu (*a,b*) ako je u tom intervalu:

i) uniformno ograničena, to jest da je $|f(x)| \leq M$ **za svako** $x \in (a,b)$**,gde je M konstanta**

(ako je ograničena u intervalu (*a,b*) ili konačna u svim tačkama tog intervala)

ii) ima ne više od konačnog broja tačaka prekida i sve su prvog reda, to jest u svakoj tački prekida postoji konačan levi i desni limes

(ako je u tom intervalu neprekidna ili ima konačan broj prekida prve vrste, takozvanih "skokova")

iii) ima ne više od konačnog broja pravih ekstremuma

(ako je u datom intervalu monotona ili ima konačan broj ekstremuma)

Dirhleova teorema

Neka je $f(x) \in X`, X` = \{f \in X / f$ ima odgovarajuće jednostrane izvode na $[-\pi, \pi]$.

Furijeov red funkcije f(x) konvergira ka vrednosti:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

a u tačkama $x = \pm\pi$ konvergira ka

$$\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}$$

Na primer, ako uzmemo da su *b* i *c* tačke prekida prve vrste, Furijeov red ima sumu:

$$S = \frac{f(b-0)+f(b+0)}{2} \quad \text{ili} \quad S = \frac{f(c-0)+f(c+0)}{2}$$

Na primer, ako se radi o intervalu [*m,n*], na krajevima intervala Furijeov red ima sumu $S = \frac{f(m)+f(n)}{2}$

Kako se funkcija razvija u Furijeov red?

Na predavanjima profesori najčešće to objašnjavaju preko funkcije f(x) zadate u intervalu $[-\pi, \pi]$, koja se periodički produžava periodom 2π.

Furijeov red je oblika:

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

a_0, a_n, b_n su Furijeovi koeficijenti koje mi ustvari i tražimo preko formula.

<u>1) Ako nam je dat interval</u> $[-\pi,\pi]$

i) Ako funkcija nije ni parna ni neparna, onda je:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

ii) Ako je na intervalu $[-\pi,\pi]$ funkcija neparna , onda je:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx \qquad \text{dok su } a_0=0\wedge a_n=0$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

iii) Ako je na intervalu $[-\pi,\pi]$ funkcija parna, onda je:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nxdx \qquad \text{dok je} \qquad b_n=0$$

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

2) Ako nam je dat interval $[-l, l]$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l})$$

3) Ako je funkcija data u proizvoljnom intervalu **[*a, b*]**

$$a_0 = \frac{2}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{b-a})$$

U zadacima će vam se često padati neki od sledećih integrala, pa da se nebi mučili:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx = 0; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx = 0; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin nxdx = 0; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mxdx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mxdx = 0; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nxdx = \pi; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nxdx = \pi$$

Kod svih ovih integrala je naravno $m \neq n$

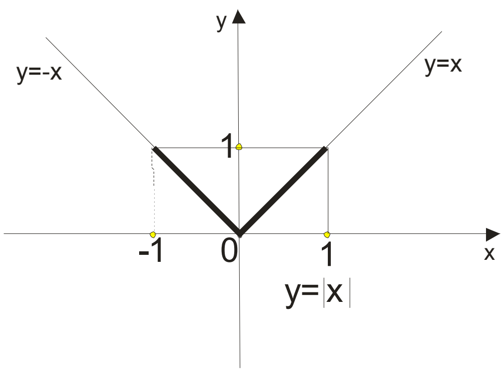
FURIJEOVI REDOVI – ZADACI (I deo)

Primer 1.

Funkciju $y=|x|$ razviti u Furijeov red na intervalu $[-\pi,\pi]$

Rešenje:

Najpre ćemo nacrtati sliku da se podsetimo kako izgleda ova funkcija...



Očigledno je funkcija parna (grafik je simetričan u odnosu na y osu), pa koristimo formule:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx \qquad \text{dok je} \qquad b_n=0$$

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx=\frac{2}{\pi}\cdot(\frac{x^2}{2})\Big/_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\cdot(\frac{\pi^2}{2})=\pi$$

Dalje tražimo:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx dx = a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx =$$

Ovaj integral ćemo rešiti uz pomoć parcijalne integracije, izvučimo ga na stranu , bez granica:

$$\int x\cos nx dx = \begin{vmatrix} x = u & \cos nx dx = dv \\ dx = du & \frac{1}{n}\sin nx = v \end{vmatrix} = x\cdot\frac{1}{n}\sin nx - \int\frac{1}{n}\sin nx dx = \frac{x\sin nx}{n} - \frac{1}{n}\int\sin nx dx =$$

$$= \frac{x\sin nx}{n} + \frac{1}{n}\frac{1}{n}\cos nx = \frac{x\sin nx}{n} + \frac{1}{n^2}\cos nx$$

Sad mu stavimo granicu:

$$\left(\frac{x\sin nx}{n} + \frac{1}{n^2}\cos nx\right)\Big/_0^\pi = \left(\underbrace{\boxed{\frac{\pi\sin n\pi}{n}}}_{ovo\ je\ 0} + \frac{1}{n^2}\cos n\pi\right) - \left(\frac{0\cdot\sin n\cdot 0}{n} + \frac{1}{n^2}\underbrace{\boxed{\cos n\cdot 0}}_{ovo\ je\ 1}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\cos n\pi - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}(\cos n\pi - 1)$$

Onda je :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1)$$

Naravno da n uzima vrednosti 1,2,3...

Izraz $\cos n\pi$ neizmenično ima vrednosti :

za n=1 je cosπ=-1
za n=2 je cosπ=1
za n=3 je cosπ=-1
za n=4 je cosπ=1
itd.

Dakle , važi da je $\boxed{\cos n\pi = (-1)^n}$

Onda je $a_n = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1)$

Ako je n paran broj , imamo: $a_{2n} = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^{2n} - 1) = 0$

Ako je n neparan broj , imamo: $a_{2n-1} = \frac{2}{\pi(2n-1)^2}((-1)^{2n-1} - 1) = \frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cdot(-2) = \frac{-4}{\pi(2n-1)^2}$

Vratimo se sada u formulu za razvoj:

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=\frac{1}{2}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-4}{\pi(2n-1)^2}\right)\cos(2n-1)x=\frac{1}{2}\pi+\frac{-4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

$Dakle:$

$$\boxed{f(x)=|x|=\frac{1}{2}\pi-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}}$$

Primer 2.

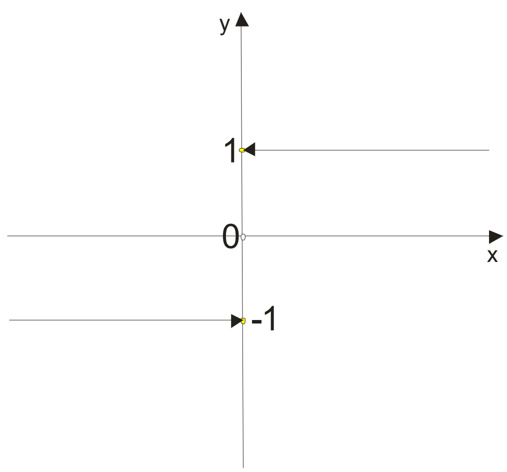
Razviti u Furijeov red funkciju $f(x)=\operatorname{sgn}x$ u intervalu $[-\pi,\pi]$

<u>*Rešenje:*</u>

Najpre malo objašnjenje:

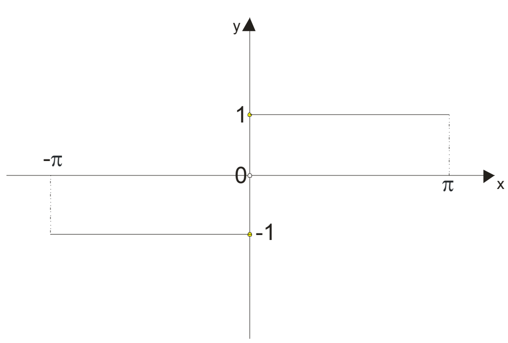
Funkcija *sgnx* se čita signum od x ili po naški znak od x .

Ona je ustvari: $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & za\ x<0\\ 0, & za\ x=0\\ +1, & za\ x>0\end{cases}$ pogledajmo sliku:



Ako je $x\neq 0$ onda imamo $\operatorname{sgn}x=\frac{x}{|x|}$

Nama ova funkcija treba na intervalu $[-\pi,\pi]$:



Očigledno je data funkcija neparna, pa koristimo formule: $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$ $\qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Big/_{0}^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos n\pi}{n} + \frac{\cos n\cdot 0}{n}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\right) = \boxed{\frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n)}$$

Opet ćemo razlikovati parne i neparne članove:

Za n paran broj je $\mathrm{b}_{2n} = 0$

Za n neparan broj je $\mathrm{b}_{2n-1} = \frac{2}{\pi(2n-1)}(1+1) = \frac{4}{\pi(2n-1)}$

Sada se vratimo u početnu formulu za razvoj i imamo:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)}\sin(2n-1)x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

$$\boxed{\operatorname{sgn} x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}}$$

Primer 3.

Funkciju $f(x) = \{ \begin{matrix} \pi, & -\pi \le x < 0 \\ x, & 0 \le x \le \pi \end{matrix}$ razviti u trigonometrijski red.

Rešenje:

Najpre uočimo da je zadati interval $[-\pi,\pi]$. Znači da ćemo koristiti formule:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

Pazite na jednu stvar: pošto je funkcija zadata na ovaj način moramo raditi 2 integrala, gde ćemo kad su granice od $-\pi$ do 0 uzimati vrednost *f(x)* = π, a kad granice idu od 0 do π uzimamo *f(x)* = *x*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \pi dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\pi\cdot x\Big/_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big/_{0}^{\pi} = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{1}{\cancel{\pi}}\int_{-\pi}^{0}\cancel{\pi}\cos nx dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx dx$$
$$=\int_{-\pi}^{0}\cos nx dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx dx$$

Ovde imamo integral sa parcijalnom integracijom, pa ćemo njegovu vrednost (bez granica naći "na stranu")

$$\int x\cos nx dx=\begin{vmatrix} x=u & \cos nx dx=dv \\ dx=du & \frac{1}{n}\sin nx=v \end{vmatrix}=x\cdot\frac{1}{n}\sin nx-\int\frac{1}{n}\sin nx dx=\frac{x\sin nx}{n}-\frac{1}{n}\int\sin nx dx=$$
$$=\frac{x\sin nx}{n}+\frac{1}{n}\frac{1}{n}\cos nx=\frac{x\sin nx}{n}+\frac{1}{n^2}\cos nx$$

Sad se vratimo u a_n :

$$a_n=\int_{-\pi}^{0}\cos nx dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx dx=\frac{1}{n}\sin nx\Big/_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}+\frac{1}{n^2}\cos nx\right)\Big/_{0}^{\pi}$$
$$=[\underbrace{\frac{1}{n}\sin n\cdot 0-\frac{1}{n}\sin n(-\pi)}_{ovo\ je\ sve\ 0}]+\frac{1}{\pi}[\left(\underbrace{\frac{\pi\sin n\pi}{n}}_{ovo\ je\ 0}+\frac{1}{n^2}\cos n\pi\right)-\left(\underbrace{\frac{0\sin n\cdot 0}{n}}_{ovo\ je\ 0}+\frac{1}{n^2}\cos n\cdot 0\right)]$$
$$=\frac{1}{\pi}(\frac{1}{n^2}\cos n\pi-\frac{1}{n^2})=\frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)=\frac{1}{\pi n^2}((-1)^n-1)$$

Dakle:

$$a_n=\frac{1}{\pi n^2}((-1)^n-1)=\begin{cases}\dfrac{-2}{\pi(2k+1)^2}, & n=2k+1,\quad k=0,1,2,3...\\ 0, & n=2k,\quad k=0,1,2,3...\end{cases}$$

Još da nadjemo :

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\pi\sin nx dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nx dx$$
$$=\int_{-\pi}^{0}\sin nx dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nx dx$$

I ovde ćemo najpre odraditi parcijalnu integraciju:

$$\int x\sin nx dx=\begin{vmatrix} x=u & \sin nx dx=dv \\ dx=du & -\frac{1}{n}\cos nx=v \end{vmatrix}=-x\cdot\frac{1}{n}\cos nx+\int\frac{1}{n}\cos nx dx=-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{1}{n}\int\cos nx dx=$$
$$=-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{1}{n}\frac{1}{n}\sin nx=\boxed{-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{1}{n^2}\sin nx}$$

Sada imamo:

$$b_n = \int_{-\pi}^{0} \sin nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nxdx$$

$$= \left(-\frac{1}{n}\cos nx\right) / \begin{matrix}0\\-\pi\end{matrix} + \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{1}{n^2}\sin nx\right) / \begin{matrix}\pi\\0\end{matrix}$$

$$= \left\{\left(-\frac{1}{n}\cos n\cdot 0\right) - \left(-\frac{1}{n}\cos n(-\pi)\right)\right\} + \frac{1}{\pi}\left\{\left(-\frac{\pi\cos n\pi}{n} + \frac{1}{n^2}\sin n\pi\right) - \left(-\frac{0\cdot\cos(n\cdot 0)}{n} + \frac{1}{n^2}\sin(n\cdot 0)\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cos n\pi + \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi\cos n\pi}{n}\right)$$

$$b_n = -\frac{1}{n} + \frac{\cos n\pi}{n} - \frac{\cos n\pi}{n}$$

$$b_n = -\frac{1}{n}$$

Sada možemo zapisati i ceo razvoj:

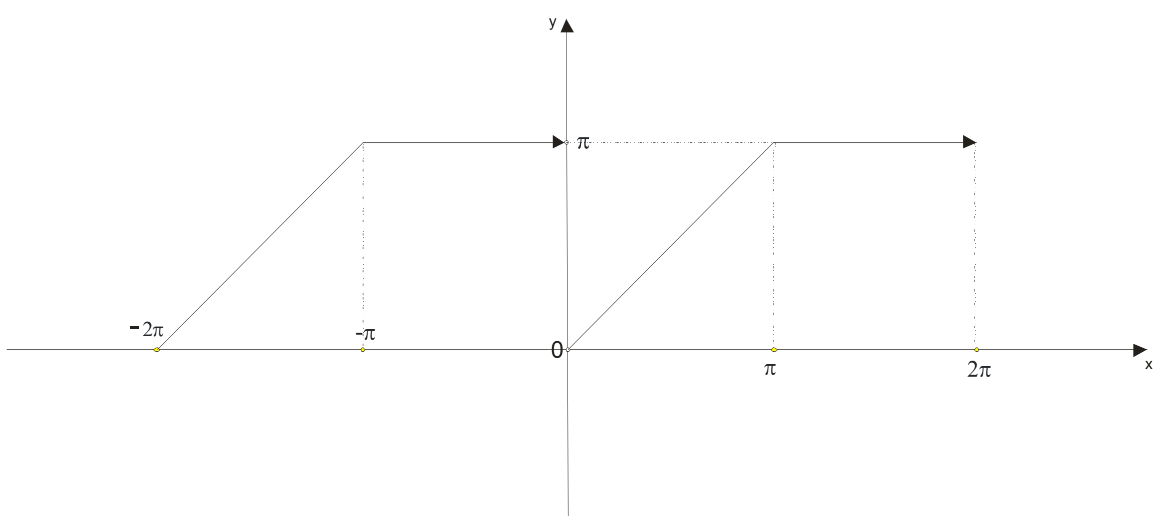
$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

$$\boxed{f(x) = \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)\pi)}{(2k+1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}}$$

Ovaj red konvergira ka funkciji S koja se, po Dirihleovoj teoremi poklapa sa funkcijom f na intervalu:

$[-\pi,0)\cup(0,\pi]$ a kako f(x) ima prekid za x = 0 to je $S(0) = \dfrac{f(0-0)+f(0+0)}{2} = \dfrac{\pi+0}{2} = \dfrac{\pi}{2}$

grafik pogledajte na slici:



FURIJEOVI REDOVI – ZADACI (II deo)

Primer 4.

Funkciju $f(x)=|x|-1$ razviti u Furijeov red na segmentu $[-1,1]$ a zatim izračunati sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

Rešenje:

Kako je $f(-x)=|-x|-1=|x|-1=f(x)$ zaključujemo da je funkcija parna .

Koristimo formule:

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx \qquad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \qquad b_n=0$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1}(x-1)dx=2\int_{0}^{1}(x-1)dx=2\left(\frac{x^2}{2}-x\right)/\begin{matrix}1\\0\end{matrix}=-1$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1}(x-1)\cos\frac{n\pi x}{1}dx=2\int_{0}^{1}(x-1)\cos n\pi x dx$$

Kao i uvek , ovaj integral ćemo rešiti na stranu uz pomoć parcijalne integracije:

$$\int(x-1)\cos n\pi x dx=\begin{vmatrix}x-1=u & \cos n\pi x dx=dv\\ dx=du & \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x=v\end{vmatrix}=(x-1)\cdot\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x-\int\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x dx=$$

$$=\frac{(x-1)\sin n\pi x}{n\pi}-\frac{1}{n\pi}\int\sin n\pi x dx==\frac{(x-1)\sin n\pi x}{n\pi}+\frac{1}{n\pi}\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x$$

$$=\frac{(x-1)\sin n\pi x}{n\pi}+\frac{1}{(n\pi)^2}\cos n\pi x$$

Sad se vratimo da ubacimo granice:

$$a_n=2\int_{0}^{1}(x-1)\cos n\pi x dx=2\left(\frac{(x-1)\sin n\pi x}{n\pi}+\frac{1}{(n\pi)^2}\cos n\pi x\right)/\begin{matrix}1\\0\end{matrix}=$$

$$=2\left[\left(\frac{(1-1)\sin n\pi 1}{n\pi}+\frac{1}{(n\pi)^2}\cos n\pi 1\right)-\left(\frac{(0-1)\sin n\pi 0}{n\pi}+\frac{1}{(n\pi)^2}\cos n\pi 0\right)\right]$$

$$=2\left(\frac{1}{(n\pi)^2}\cos n\pi-\frac{1}{(n\pi)^2}\right)=\frac{2}{(n\pi)^2}\left(\cos n\pi-1\right)=\frac{2}{(n\pi)^2}\left((-1)^n-1\right)$$

Slično kao u prethodnim primerima, razmišljamo o parnim i neparnim *n,* pa je:

$$a_n = \{ \begin{matrix} 0, & n = 2k \\ -\frac{4}{(n\pi)^2}, & n = 2k-1 \end{matrix}$$

Sad idemo u početnu formulu:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l})$$

$$f(x) = |x| - 1 = \frac{1}{2}(-1) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4}{(2k-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{1}$$

$$\boxed{|x| - 1 = -\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}}$$

Pogledajmo i sumu koja se traži: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$. Vidimo da u našem redu treba ubaciti x = 0 :

$$|0| - 1 = -\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)\pi 0}{(2k-1)^2}$$

$$-1 = -\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{2} \to \boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

Primer 5.

Funkciju *f(x) = x-2* razviti u Furijeov red na segmentu *[1,3]* .

Rešenje:

Moramo koristiti formule:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{b-a})$$

$$a_0 = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx \qquad b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}dx$$

Dakle, imamo:

$$a_0 = \frac{2}{3-1}\int_1^3 (x-2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) / \begin{matrix}3\\1\end{matrix} = \left(\frac{3^2}{2} - 6\right) - \left(\frac{1^2}{2} - 2\right) = 0$$

$$a_n = \frac{2}{3-1}\int_1^3 (x-2)\cos\frac{2n\pi x}{3-1}dx =$$

$$= \int_1^3 (x-2)\cos n\pi x dx$$

Da rešimo najpre ovo bez granica:

$$\int (x-2)\cos n\pi x dx = \begin{vmatrix} x-2=u & \cos n\pi x dx = dv \\ dx = du & \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x = v \end{vmatrix} = (x-2)\cdot\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x - \int \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x dx =$$

$$= \frac{(x-2)\sin n\pi x}{n\pi} - \frac{1}{n\pi}\int \sin n\pi x dx == \frac{(x-2)\sin n\pi x}{n\pi} + \frac{1}{n\pi}\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x$$

$$= \frac{(x-2)\sin n\pi x}{n\pi} + \frac{1}{(n\pi)^2}\cos n\pi x$$

$$a_n = \int_1^3 (x-2)\cos n\pi x dx = \left(\frac{(x-2)\sin n\pi x}{n\pi} + \frac{1}{(n\pi)^2}\cos n\pi x\right) / \begin{matrix}3\\1\end{matrix} =$$

$$= \left(\frac{(3-2)\sin n\pi 3}{n\pi} + \frac{1}{(n\pi)^2}\cos n\pi 3\right) - \left(\frac{(1-2)\sin n\pi 1}{n\pi} + \frac{1}{(n\pi)^2}\cos n\pi 1\right) =$$

$$= \frac{\sin 3n\pi}{n\pi} + \frac{1}{(n\pi)^2}\cos 3n\pi + \frac{\sin n\pi}{n\pi} - \frac{1}{(n\pi)^2}\cos n\pi$$

$$= \frac{1}{(n\pi)^2}\cos 3n\pi - \frac{1}{(n\pi)^2}\cos n\pi$$

$$= \frac{1}{(n\pi)^2}[\cos 3n\pi - \cos n\pi]$$

Sećate se trigonometrijske formulice: $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, ako nju upotrebimo:

$$a_n = \frac{1}{(n\pi)^2}[\cos 3n\pi - \cos n\pi] = \frac{1}{(n\pi)^2}[-2\sin 2n\pi \cdot \sin n\pi] = 0 \to \boxed{a_n = 0}$$

Još da nadjemo:

$$b_n = \frac{2}{3-1}\int_1^3 (x-2)\sin\frac{2n\pi x}{3-1}dx = \int_1^3 (x-2)\sin n\pi x dx$$

$$\int (x-2)\sin n\pi x dx = \begin{vmatrix} x-2=u & \sin n\pi x dx = dv \\ dx = du & -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x = v \end{vmatrix} = -(x-2)\cdot\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x + \int \frac{1}{n\pi}\cos n\pi x dx =$$

$$= \frac{-(x-2)\cos n\pi x}{n\pi} + \frac{1}{n\pi}\int \cos n\pi x dx = = \frac{-(x-2)\cos n\pi x}{n\pi} + \frac{1}{n\pi}\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x$$

$$= \frac{-(x-2)\cos n\pi x}{n\pi} + \frac{1}{(n\pi)^2}\sin n\pi x$$

Da ubacimo granice:

$$b_n = \int_1^3 (x-2)\sin n\pi x dx = \left(\frac{-(x-2)\cos n\pi x}{n\pi} + \frac{1}{(n\pi)^2}\sin n\pi x\right) / \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} =$$

$$\left(\frac{-(3-2)\cos n\pi 3}{n\pi} + \frac{1}{(n\pi)^2}\sin n\pi 3\right) - \left(\frac{-(1-2)\cos n\pi x}{n\pi} + \frac{1}{(n\pi)^2}\sin n\pi 1\right) =$$

$$-\frac{\cos n\pi 3}{n\pi} - \frac{\cos n\pi x}{n\pi} = -\frac{1}{n\pi}\left(\cos 3n\pi + \cos n\pi\right)$$

Opet mora formulica: $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}\left(\cos 3n\pi + \cos n\pi\right) = -\frac{1}{n\pi}2\underbrace{\boxed{\cos 2n\pi}}_{ovo\ je\ 1}\cos n\pi = -\frac{2}{n\pi}(-1)^n = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

$$\boxed{b_n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}}$$

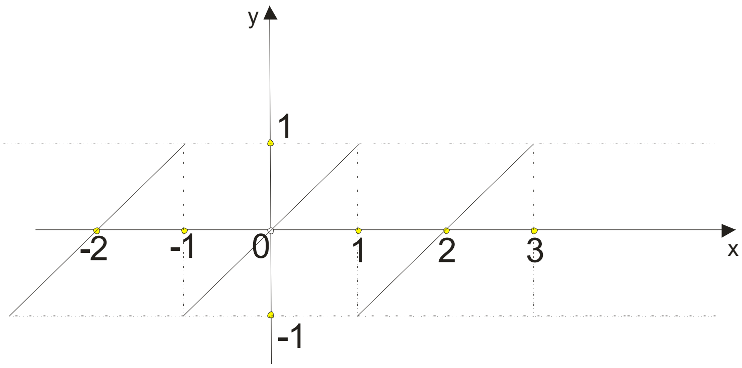
Sad idemo u početnu formulu:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2n\pi x}{b-a} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{b-a})$$

Pazite:

f(1-0)=1 , f(1+0)=1 i f(3-0)=1, f(3+0)=-1

pogledajte sliku:



pa je

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3-1}$$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}\sin n\pi x=\{\begin{matrix} x-2, & x\in(1,3) \\ 0, & x\in\{1,3\}\end{matrix}$$

Primer 6.

Funkciju $f(x)=\begin{Bmatrix} x, & x\in(0,1) \\ 2-x, & x\in[1,2]\end{Bmatrix}$ razviti u red po:

a) po sinusima

b) po cosinusima

Rešenje:

a)

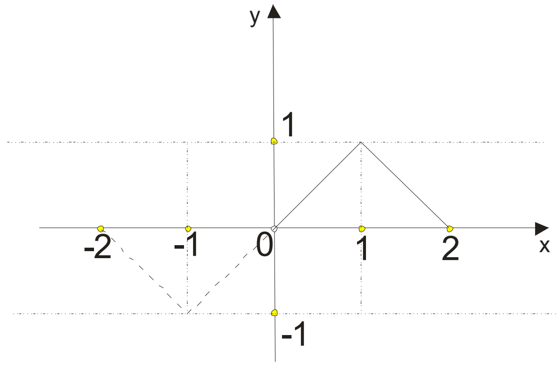
Funkciju $f(x)=\begin{Bmatrix} x, & x\in(0,1) \\ 2-x, & x\in[1,2]\end{Bmatrix}$ razviti u red po sinusima.

Da bi smo razvili ovu funkciju po sinusima, moramo je dodefinisati do **neparne** funkcije.

To ćemo obaviti na sledeći način:

$$F(x)=\begin{Bmatrix} 2-x, & x\in[1,2] \\ x, & x\in(-1,1) \\ -2-x, & x\in[-2,-1]\end{Bmatrix}$$

Pogledajmo kako ova funkcija izgleda na slici:



Naravno da su ovde a_0 i a_n jednaki nuli a tražimo: $b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{2}\int_{0}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \int_{0}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

Zbog načina na koji je funkcija definisana, ovaj integral rastavljamo na dva:

$$b_n = \int_{0}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \int_{0}^{1} x\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \int_{1}^{2}(2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

Nakon rešavanja ovih integrala, metodom parcijalne integracije, na sličan način kao u prethodnim primerima dobijamo:

$$b_n = \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

Razmišljamo kako se ponaša $\sin\frac{n\pi}{2}$. Znamo da n uzima vrednosti 1,2,3...

Za n = 1 $\sin\frac{n\pi}{2} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

Za n = 2 $\sin\frac{n\pi}{2} = \sin\frac{2\pi}{2} = 0$

Za n = 3 $\sin\frac{n\pi}{2} = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$

Za n = 4 $\sin\frac{n\pi}{2} = \sin\frac{4\pi}{2} = 0$

Za n = 5 $\sin\frac{n\pi}{2} = \sin\frac{5\pi}{2} = 1$

Za n = 6 $\sin\frac{n\pi}{2} = \sin\frac{6\pi}{2} = 0$

$itd.$

Dakle, zaključujemo: $b_n = \begin{cases} 0, & n=2k \\ (-1)^k \dfrac{8}{(2k+1)^2\pi^2}, & n=2k+1 \end{cases}$ k=0,1,2,3…….

Pa je:

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2}, za\ x \in (0,2]$$

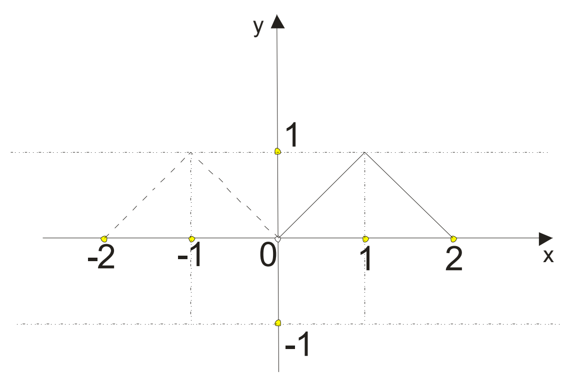
$$F(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2}, za\ x \in [-2,2]$$

b)

Za razvoj po kosinusima moramo dodefinisati funkciju do parne na sledeći način:

$$F(x) = \begin{cases} x+2, & x \in [-2,-1] \\ |x|, & x \in (-1,1) \\ x-2, & x \in [1,2] \end{cases}$$

Data funkcija je prikazana na sledećoj slici:



Naravno, sada je $b_n = 0$ a tražimo: $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$ $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx$$
$$a_0 = \frac{2}{2}\int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{0}^{1} xdx + \int_{1}^{2}(2-x)dx = 1$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_{0}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \int_{0}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \int_{0}^{1} x\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_{1}^{2} (2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx$$

Parcijalnom integracijom rešimo ove integrale i dobijamo:

$$a_n = \frac{8}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}(1+\cos n\pi)$$

Razmislimo kako se ponaša izraz $\cos\frac{n\pi}{2}$ za različite n.

za n=1 $\cos\frac{n\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

za n=2 $\cos\frac{n\pi}{2} = \cos\frac{2\pi}{2} = -1$

za n=3 $\cos\frac{n\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$

za n=4 $\cos\frac{n\pi}{2} = \cos\frac{4\pi}{2} = 1$

itd.

Dakle, ako je *n* neparan broj , *n=2k+1* , tada je $a_n = 0$

Pogledajmo sada parne n, ali oblika *n=4k* ili *n=4k+2* za *k=0,1,2,3…….*

n=4k

$$a_n = \frac{8}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}(1+\cos n\pi)$$

$$a_{4k} = \frac{8}{(4k)^2\pi^2}\cos\frac{4k\pi}{2} - \frac{4}{(4k)^2\pi^2}(1+\cos 4k\pi) = \frac{8}{16k^2\pi^2}\cos 2k\pi - \frac{4}{16k^2\pi^2}(1+1)$$

$$= \frac{8}{16k^2\pi^2}\cos 2k\pi - \frac{8}{16k^2\pi^2}\cos 2k\pi = 0$$

n=4k+2

$$a_n = \frac{8}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}(1+\cos n\pi)$$

$$a_{4k} = \frac{8}{(4k+2)^2\pi^2}\cos\frac{(4k+2)\pi}{2} - \frac{4}{(4k+2)^2\pi^2}(1+\cos(4k+2)\pi)$$

$$= \frac{\cancel{8}}{\cancel{4}(2k+1)^2\pi^2}\cos\frac{\cancel{2}(2k+1)\pi}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}(2k+1)^2\pi^2}(1+\cos 2\pi(2k+1))$$

$$= \frac{2}{(2k+1)^2\pi^2}\underbrace{\cos(2k+1)\pi}_{ovo\ je\ -1} - \frac{1}{(2k+1)^2\pi^2}(1+1)$$

$$= -\frac{2}{(2k+1)^2\pi^2} - \frac{2}{(2k+1)^2\pi^2} = \boxed{-\frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}}$$

Konačno imamo:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}, \quad x \in (0,2] \quad \text{i} \quad F(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}, \quad x \in [-2,2]$$

PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

Homogena linearna parcijalna diferencijalna jednačina

Oblika je:

$$X_1(x_1,x_2,\dots x_n)\frac{\partial u}{\partial X_1} + X_2(x_1,x_2,\dots x_n)\frac{\partial u}{\partial X_2} + \dots\dots + X_n(x_1,x_2,\dots x_n)\frac{\partial u}{\partial X_n} = 0$$

Iz date jednačine formiramo sistem jednačina u simetričnom obliku:

$$\frac{dX_1}{X_1(x_1,x_2,...,x_n)} = \frac{dX_2}{X_2(x_1,x_2,...,x_n)} = ... = \frac{dX_n}{X_n(x_1,x_2,...,x_n)}$$

Rešimo ovaj sistem, i dobijemo integrale(rešenja)

$$\left.\begin{array}{l} \psi_1(x_1,x_2,...,x_n) \\ \psi_2(x_1,x_2,...,x_n) \\ \text{--------------} \\ \psi_n(x_1,x_2,...,x_n) \end{array}\right\} \quad U = \phi\left(\psi_1,\psi_2,...,\psi_n\right) \quad \text{je opšte rešenje}$$

Košijev zadatak:

Dat je neki početni uslov, njega zamenimo u ψ_1, $\psi_2,...,\psi_n$, i rešavamo po $x_1,...,x_{n-1}$, to zamenimo u traženo Košijevo rešenje.

Znači moramo da eliminišemo nepoznate (najčešće x,y i z) i sve predstavimo preko :

$\overline{\psi_1}$, $\overline{\psi_2}$, ...Nađemo vezu između njih i vratimo prava rešenja.

Nehomogena linearna parcijalna diferencijalna jednačina

Oblika je: $X_1(x_1,x_2,\dots x_n,u)\frac{\partial u}{\partial X_1} + X_2(x_1,x_2,\dots x_n,u)\frac{\partial u}{\partial X_2} + \dots\dots + X_n(x_1,x_2,\dots x_n,u)\frac{\partial u}{\partial X_n} = R(x_1,\dots,x_n,u)$

Formiramo sistem: $$\frac{dX_1}{X_1(x_1,x_2,...,x_n,u)} = \frac{dX_2}{X_2(x_1,x_2,...,x_n,u)} = ... = \frac{dX_n}{X_n(x_1,x_2,...,x_n,u)} = \frac{du}{R(x_1,..x_n,u)}$$

Kao rešenje dobijamo n-nezavisnih prvih integrala:

$$\psi_1(x_1, x_2, ..., x_n, u)$$
$$\psi_2(x_1, x_2, ..., x_n, u)$$
- - - - - - - - - - - - - - - - -
$$\psi_n(x_1, x_2, ..., x_n, u)$$

Košijev zadatak rešavamo isto kao kod homogene.

Važno: Ovde uvek moramo proveriti nezavisnost prvih integrala:

Na primer, ako imamo dve nepoznate x i y ,tada je:

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(x, y)} \neq 0$$

Ako imamo tri nepoznate: x,y,z onda je:

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}{D(x, y, z)} \neq 0 \quad \text{itd.}$$

Ako se negde javi p i q , znamo da je p= $\frac{\partial z}{\partial x}$ i q = $\frac{\partial z}{\partial y}$

SISTEMI DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Normalni oblik

$$\frac{dx_1}{dx} = f_1(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)$$
$$\frac{dx_1}{dx} = f_2(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dx_1}{dx} = f_n(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

Svaki sistem jednačina višeg rada može se svesti na odgovarajući sistem jednačina prvog reda .

Sistem od n jednačina prvog reda može se uvek svesti na jednu jednačinu n-tog reda.

Najčešće koristimo metod eliminacije, kombinujemo date jednačine da dobijemo neku jednačinu po jednoj od nepoznatih.....

Simetrični oblik

$$\frac{dX_1}{X_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)} = \frac{dX_2}{X_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)} = \ldots\ldots = \frac{dX_n}{X_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$$

Opet kombinujemo jednačine....sada za rešenje dobijamo(ako imamo tri u sistemu) :

$$\begin{cases} C_1=\psi_1(x_1,x_2) \longrightarrow \text{prvi integral} \\ C_2 = \psi_2(x_1,x_2) \longrightarrow \text{drugi integral} \end{cases}$$

Tablica neodređenih integrala

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \in \mathcal{Z} \setminus \{-1\}, \; x \neq 0 \text{ ako je } n < 0$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \in \mathcal{R} \setminus \{-1\}, \, x > 0,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C, \quad (x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2})$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C, \, (x \neq 2k\pi)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \, (x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2})$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad (x \neq 2k\pi)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad x \neq a$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \, a \neq 1$$

$$\int \operatorname{sh} dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \operatorname{ch} dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \operatorname{th} x dx = \ln \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \operatorname{cth} x dx = \ln|\operatorname{sh} x| + C$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C, \quad x \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad |x| < a$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C, \quad |x| > a$$

DVOSTRUKI INTEGRALI

1. DIREKTNO IZRAČUNAVANJE

Ako je oblast D određena nejednakostima :

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases} \quad \text{onda je:} \quad \iint_D z(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)dy$$

Ako je oblast D određena nejednakostima:

$$\begin{cases} x_1(y) \le x \le x_2(y) \\ c \le y \le d \end{cases} \quad \text{onda je :} \quad \iint_D z(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} z(x,y)dx$$

2. OPŠTE KOORDINATE

Ako se sa x=x(u,v) i y=y(u,v) , gde su ovo neprekidne i diferencijabilne funkcije , realizuje jednoznačno preslikavanje ograničene i zatvorene oblasti D u ravni xOy na oblast D\` u ravni uOv i ako je:

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \ne 0 \qquad \text{Onda važi formula:}$$

$$\iint_D z(x,y)dxdy = \iint_{D`} z[x(u,v), y(u,v)]\left|J\right|dudv$$

3. POLARNE KOORDINATE

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad \text{onda je :} \quad \iint_D z(x,y)dxdy = \iint_{D`} z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\left|J\right|drd\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^r z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$$

$|J| = \text{r}$

4. ELIPTIČKE KOORDINATE

$$\begin{cases} x = a\,r\cos\varphi \\ y = b\,r\sin\varphi \quad \text{onda je: } \iint_D z(x,y)dxdy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^r z(ar\cos\varphi, br\sin\varphi)abrdr \\ |J| = abr \end{cases}$$

PRIMENA DVOSTRUKIH INTEGRALA

i) Izračunavanje površine površi

Ako je površ zadata jednačinom z = z(x,y) i ako obeležimo $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ i $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ onda je:

$$P = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dxdy$$

Ako je površ zadata parametarskim jednačinama x=x(u,v) i y=y(u,v) onda je:

$$P = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,dudv$$

gde je:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

ii) Izračunavanje zapremine

Zapremina cilindra, koji odozgo ograničava neprekidna površ definisana jednačinom z=z(x,y), odozdo ravan z=0 , a sa strane prava cilindrična površ, koja u ravni xOy iseca neku oblast D, data je formulom:

$$\mathrm{V} = \iint_D z(x, y)dxdy$$

TROSTRUKI INTEGRALI

1. DIREKTNO RAČUNANJE

Ako je funkcija f(x,y,z) neprekidna u oblasti V koja je određena sa:

$$\begin{cases} x_1 \le x \le x_2 \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \end{cases} \quad \text{onda je} \quad \iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

2. CILINDRIČNE KOORDINATE

$$\begin{cases} \text{x} = \text{r} \cos\varphi \\ \text{y} = \text{r} \sin \varphi \\ \text{z} = \text{z} \end{cases} \quad \text{onda je} \quad \iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)drd\varphi dz = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^r rdr \int_{z_1}^{z_2} fdz$$

$|J| = \text{r}$

3. SFERNE KOORDINATE

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$|J| = r^2 \sin\theta$ Odavde je $x^2+y^2+z^2 = r^2$

Uglove φ i θ određujemo iz zadatka i vodimo računa da je najčešće :

$r \ge 0; 0 \le \varphi \le 2\pi; 0 \le \theta \le \pi$

Možemo koristiti(u zavisnosti od situacije) i modifikovane sferne koordinate:

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi\sin\theta \\ y = br\sin\varphi\sin\theta \\ \end{cases}$$

$$z = cr\cos\theta$$
$$\left|J\right| = abcr^2\sin\theta$$

A u situaciji kad je zadata površ baš "zeznuta" možemo koristiti i sledeće smene:

$$\begin{cases} x = ar\cos^{\beta}\varphi\sin^{\alpha}\theta \\ y = br\sin^{\beta}\varphi\sin^{\alpha}\theta \\ z = cr\cos^{\alpha}\theta \end{cases}$$

Jakobijan u ovoj situaciji računamo:

$$\left|J\right| = abcr^2\sin^{2\alpha-1}\theta\cos^{\alpha-1}\theta\sin^{\beta-1}\varphi\cos^{\beta-1}\varphi$$

Osnovna perioda je $r \geq 0; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq \theta \leq \pi$

PRIMENA TROSTRUKOG INTEGRALA ZA RAČUNANJE ZAPREMINE:

$$\mathbf{V} = \iiint_V dxdydz \qquad \text{po oblasti } V$$

KRIVOLINIJSKI INTEGRALI

1) Krivolinijski integral prve vrste

i) Ako je f(x,y,z) definisana i neprekidna u svakoj tački deo po deo glatke krive c date sa:

x=x(t)
y=y(t) gde je $t_1 \leq t \leq t_2$, i ds- diferencijal luka krive
z=z(t)

tada se krivolinijski integral prve vrste izračunava po formuli:

$$\int_c f(x,y,z)ds = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{(x_t^`)^2+(y_t^`)^2+(z_t^`)^2}\,dt$$

Ovaj integral ne zavisi od orijentacije krive!

ii) Ako je kriva data u obliku c: y=y(x) $a \leq x \leq b$ tada je:

$$\int_c f(x,y)ds = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y_x^`)^2}\,dx$$

iii) Ako je kriva data u obliku c: x=x(y) i $m \leq y \leq n$ tada je :

$$\int_c f(x,y)ds = \int_m^n f(x(y),y)\sqrt{1+(x_y^`)^2}\,dy$$

Izračunavanje dužine krive c : **S =** $\int_c ds$

2. Krivolinijski integral druge vrste

i) Ako je kriva c zadata parametarskim jednačinama:

x=x(t)
y=y(t) gde je $t_0 \le t \le t_1$ tada je:
z=z(t)

$$\int_c P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_{t_0}^{t_1} [P(x(t),y(t),z(t))x_t^` + Q(x(t),y(t),z(t))y_t^` + R(x(t),y(t),z(t))z_t^`]dt$$

ii) Ako je kriva c zadata u ravni y=y(x) i $a \le x \le b$ tada je:

$$\int_c P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y_x^`]dx$$

iii) Ako je kriva zadata u ravni x=x(y) i $m \le y \le n$ tada je :

$$\int_c P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_m^n [P(x(y),y)x_y^` + Q(x(y),y)]dy$$

PAZI: Krivolinijski integral druge vrste zavisi od orijentacije krive . Pozitivan smer je smer suprotan kretanju kazaljke na časovniku. $\int_{C^+} = -\int_{C^-}$

Nezavisnost krivolinijskog integrala od putanje integracije

Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

1) $\int\limits_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ ne zavisi od putanje integracije

2) Postoji funkcija u=u(x,y) tako da je du = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz i tada važi :
$\int\limits_A^B$ P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = u(B) - u(A)

3) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$

4) $\int\limits_C$ P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0 ako je kriva c zatvorena.

Grinova formula:

Ako kriva C ograničava oblast D (to jest ona je rub oblasti D) pri čemu D ostaje sa leve strane prilikom obilaska krive C, i važi da su funkcije P,Q,R neprekidne zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog reda u oblasti D i na njenom rubu, onda važi formula:

$$\oint\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Iz Grinove formule se lako dokazuje da je **površina oblasti P(D)** koja je ograničena krivom C data formulom:

$$P(D)=\frac{1}{2}\int_C xdy - ydx$$

POVRŠINSKI INTEGRALI

Površinski integral prve vrste

i) Ako je S deo po deo glatka dvostrana površ zadata jednačinama:

x=x(u,v)
y=y(u,v)
z=z(u,v)

gde (u,v) pripada D a funkcija f(x,y,z) je definisana i neprekidna na površi S , onda je:

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_D f[x(u,v), y(u,v), z(u,v)]\sqrt{EG-F^2}dudv$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

ii) Ako jednačina površi S ima oblik z=z(x,y) , gde je z=z(x,y) jednoznačna neprekidno diferencijabilna funkcija, onda je:

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_D f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+p^2+q^2}dxdy \quad \text{i}$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{i} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

POVRŠINSKI INTEGRAL PRVE VRSTE NE ZAVISI OD ORIJENTACIJE KRIVE

Površinski integral druge vrste

Ako je S glatka dvostrana površ na kojoj je izabrana jedna od dveju strana , određena smerom normale

$\vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ i z = z(x,y) tada je :

$$\cos\alpha = \frac{p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}} \qquad \text{gde je:} \quad p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{i} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\cos\gamma = \frac{-1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

VAŽNO

(**Da li ćemo uzeti + ili – zavisi od ugla koji normala gradi sa pozitivnim delom z-ose:**

Ako je taj ugao oštar ,onda mora biti cosγ >0 pa uzimamo minus ispred korena, $\cos\gamma = \dfrac{-1}{-\sqrt{1+p^2+q^2}}$

Ako je taj ugao tup, onda je cosγ <0 , pa uzimamo + ispred korena $\cos\gamma = \dfrac{-1}{+\sqrt{1+p^2+q^2}}$ **)**

a P=P(x,y,z) Q=Q(x,y,z) i R=R(x,y,z) tri funkcije, definisane i neprekidne na površi S, onda je

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

Površinski integral druge vrste **zavisi** od orijentacije krive.

Prelaskom na drugu stranu površi menja se znak.

STOKSOVA FORMULA

Ako su P, Q, R neprekidne diferencijabilne funkcije a L zatvorena , deo po deo glatka kriva koja je granica deo po deo dvostrane površi S, tada je:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

pri čemu su $\cos\alpha$, $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ koordinate normale površi S koja je orijentisana na onu stranu u odnosu na koju se obilazak krive L vrši u suprotnom smeru od smera kretanja kazaljke na satu.

FORMULA OSTROGRADSKOG

Ako je S deo po deo glatka površ , koja ograničava oblast V , a P, Q i R neprekidne funkcije zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog reda u oblasti $V \cup S$, onda važi formula:

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

gde su $\cos\alpha$, $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ kosinusi pravca spoljašnje normale površi S.

Primena:

i) Fluks vektorskog polja

Za vektorsko polje $\vec{A} = P(x,y,z) + Q(x,y,z) + R(x,y,z)$

$$\phi = \iint Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$\text{div } \vec{A} = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

ii) Cirkulacija vektorskog polja

$$C = \oint Pdx + Qdy + Rdz = \iint rot\vec{A}d\vec{S}$$

$$d\vec{S} = \vec{n}\,ds \qquad \vec{n} = \frac{gradu}{\pm(gradu)}$$

$$\text{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

ako je rot A= 0 i div A $\neq$ 0 polje je onda potencijalno.

iii) **Potencijal polja A**

$$U(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y,z)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y,z)dy + \int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz$$