DUALNI PROBLEM LINEARNOG PROGRAMIRANJA

- ZA SVAKI PRIMARNI PROBLEM (SIMPLEX METODA) MOŽE SE DEFINISATI NJEGOV DUALNI PROBLEM;
- KORISTI SE ZA MINIMUM F-JE CILJA:

$$\min W = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$$

U SIMPLEX METODI SU OVO REŠENJA

- OGRANIČENJA: TRANSPONOVANA MATRICA

$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \dots + a_{m1} y_m \geq c_1$$
$$a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{m2} y_m \geq c_2$$
$$\vdots$$
$$a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \dots + a_{mn} y_m \geq c_n$$
$$y_i \geq 0$$

- KOEFICIJENTI DUALNOG SU SLOBODNI ČLANOVI PRIMARNOG PROBLEMA; $(b_1, b_2 \dots b_n)$
- SLOBODNI ČLANOVI DUALNOG SU KOEFICIJENTI PRIMARNOG PROBLEMA

TEOREME:

1° $Z \leq W$ (F-JA CILJA PRIMARNOG PROBLEMA JE MANJA OD F-JE CILJA DUALNOG PROBLEMA)

2° x^*, y^* MOGUĆA REŠENJA PRIMARNOG, $Z^* = C^T x^* = W^* = y^T b^*$ $\Rightarrow$ ONDA SU x^*, y^* OPTIMALNA REŠENJA DUALNOG (OPT. REŠENJA PRIMARNOG JEDNAKA SU OPT. REŠENJIMA DUALNOG PROBLEMA)

$$\Rightarrow \boxed{\max Z = \min W}$$

3° USLOVI KOMPLEMENTARNOSTI

$$\boxed{\begin{aligned} y_i^* u_i^* &= 0 \\ x_j^* v_j^* &= 0 \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} i &= 1,m \\ j &= 1,n \end{aligned}$$

OSNOVNE PROMENLJIVE U PRIMARNOM PROBLEMU

DOPUNSKE PROMENLJIVE U PRIMARNOM PROBLEMU

- PROIZVOD OSNOVNE PROMENLJIVE PRIMARNOG PROBLEMA I NJOJ ODGOVARAJUĆE DOPUNSKE PROMENLJIVE DUALNOG PROBLEMA JEDNAK JE NULI (I OBRNUTO)

$$y_i^* \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y_i^* \neq 0 \Rightarrow \boxed{u_i^* = 0} \quad (\text{i obrnuto}),$$

$$x_j^* \left(c_i - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x_j^* \neq 0 \Rightarrow \boxed{v_j^* = 0} \quad (\text{i obrnuto}),$$

1) NEKA SU DATA DVA PROIZVODNA POGONA KOJA MOGU PROIZVODITI 3 PROIZVODA (P_1, P_2, P_3). NEKA JE ZA PROIZVODNJU P_j U POGONU i POTREBNO ANGAŽOVATI U TOKU JEDNE SMENE a_{ij} RADNIKA (DATO U TABELI). NEKA SE U POGONU 1 MOŽE ANGAŽOVATI U TOKU JEDNE SMENE 14, A U POGONU 2 10 RADNIKA. NEKA SE ZA SVAKU JEDINICU PROIZVODA OSTVARUJE SLEDEĆA DOBIT: $C_1 = 12$ NJ, $C_2 = 12$ NJ, $C_3 = 10$ NJ. SVAKI PROIZVOD U PROCESU PROIZVODNJE PROLAZI KROZ OBA POGONA. ODREDITI KOLIČINU PROIZVODA KOJU TREBA PROIZVESTI DA BI SE OSTVARILA MAX. DOBIT. FORMULISATI ODGOVARAJUĆI DUALNI PROBLEM.

POGON	P_1	P_2	P_3	
1	4	2	2	max 14
2	2	4	2	max 10

PRIMARNI

$$\max z = 12x_1 + 12x_2 + 10x_3$$

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 14$$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 10$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0$$

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	b_i	θ_i
u_1	4	2	2	14	3,5
u_2	2	4	2	10	5
$-z$	12	12	10	0	

	$-u_1$	$-x_2$	$-x_3$	b_i	θ_i
x_1	0.25	0,5	0,5	3,5	7
u_2	−0,5	3	1	3	1
$-z$	−3	6	4	−42	

$x_1 = 3{,}5$ $\quad x_2 = x_3 = 0$

$u_1 = 0$ $\quad z = 42$

$u_2 = 3$

	$-u_1$	$-u_2$	$-x_3$	b_i	θ_i
x_1	$0{,}\dot{3}$	$-0{,}1\dot{6}$	$0{,}\dot{3}$	2	6
x_2	$-0{,}1\dot{6}$	$0{,}\dot{3}$	$0{,}\dot{3}$	1	3
$-z$	−2	−2	2	−48	

	$-u_1$	$-u_2$	$-x_2$	b_i
x_1	0,5	−0,5	−1	2
x_3	−0,5	1	3	3
$-z$	−1	−4	−6	−54
	$=-y_1$	$=-y_2$	$=-v_2$	

$x_1^* = 2$ $\quad x_2^* = 0$ $\quad u_1 = u_2 = 0$

$x_3^* = 3$

$\text{Max } z = 54$

$v_1^* = 0$ $\quad y_1^* = 1$ $\quad ((-1)\cdot(-1))$

$v_3^* = 0$

$y_2^* = 4$

$v_2^* = 6$

DUALNI

$\min W = 14y_1 + 10y_2$

$4y_1 + 2y_2 \geq 12$

$2y_1 + 4y_2 \geq 12$ $\quad / (-1)$

$2y_1 + 2y_2 \geq 10$

$y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0$

	$-y_1$	$-y_2$	b_i
u_1	-4	-2	-12
u_2	-2	-4	-12
u_3	-2	-2	-10
W	-14	-10	0

$\min W = -\max(-W)$

	$-u_1$	$-y_2$	b_i
y_1	$-0,25$	$0,5$	3
u_2	$-0,5$	-3	-6
u_3	$-0,5$	-1	-4
W	$-3,5$	-3	42

	$-u_1$	$-u_2$	b_i
y_1	$-0,\dot{3}$	$0,16$	2
y_2	$0,16$	$-0,\dot{3}$	2
u_3	$-0,\dot{3}$	$-0,\dot{3}$	-2
W	-3	-1	48

	$-u_1$	$-u_3$	b_i
y_1	$-0,5$	$0,5$	1
y_2	$0,5$	-1	4
u_2	1	-3	6
W	-2	-3	54

$y_1 = 1$

$y_2 = 4$ $\qquad u_1 = u_3 = 0$

$u_2 = 6$ $\qquad \min W = 54$

TRANSPONIRANA i $(-A)$ OD PRIMARNE

$y_i^* \cdot u_i^* = 0$

$x_j^* \cdot v_j^* = 0$

2) $\max z = x_1 + x_2 + x_3$ PRIMARNI

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq 6$$

$$4x_1 - x_2 - x_3 \leq 8$$

$$8x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$$

DUALNI

$\min w = 4y_1 + 6y_2 + 8y_3 + 10y_4$

$$y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 8y_4 \geq 1$$

$$-y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \geq 1$$

$$2y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \geq 1$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$	$-y_4$	b_i
v_1	-1	-2	-4	-8	-1
v_2	1	-1	1	-1	-1
v_3	-2	1	1	-1	-1
w	-4	-6	-8	-10	0

⋮

	$-v_3$	$-v_2$	$-y_3$	$-y_1$	b_i'
y_4	$-0{,}5$	$-0{,}5$	-1	$0{,}5$	1
y_2	$0{,}5$	$-0{,}5$	0	$-1{,}5$	0
v_1	3	-5	-12	0	7
w	-2	-8	-18	-8	10
	$-x_3'$	$-x_2'$	$-u_3'$	$-u_1'$	

$y_i u_i = 0$

$x_j v_j = 0$

$y_1^* = y_3^* = 0$
$v_2 = v_3 = 0$
$y_4^* = 1$
$y_2^* = 0$
$v_1 = 7$

$w = 10$

$u_4 = 0$
$u_2 = 0$
$x_1^* = 0$

$x_3^* = 2$
$x_2^* = 8$

$u_1 = 8$
$u_3 = 18$

$\max z = 10$

MEŠOVITI USLOVI OGRANIČENJA

$\min w = \max z$

* $\max z = c_1 x_1 + \dots + a_i x_n$

PRIMARNI PROBLEM

$a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n \leq b_i \qquad i = 1, k$
$a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n \geq b_i \qquad i = k+1, r$
$a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n = b_i \qquad i = r+1, m$

j-to kolona

$x_j \geq 0, \; j = 1, n$

DUALNI PROBLEM

$\min w = b_1 y_1 + \dots + b_m y_m$

j-jednačina $\quad a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + \dots + a_{mj} y_m \geq c_j$

- KADA JE MEŠOVITO NEĆE SVI y BITI POZITIVNI (y koji su DATI SA ZNAKOM $\leq$ SU POZITIVNI, A y koji su DATI $\geq$ SU NEGATIVNI, A ONI SA ZNAKOM $=$ MOGU BITI $\geq, \leq, = 0$)

- OGRANIČENJA PRIMARNOG PROBLEMA SE SVODE NA SIMPLEX METODU:

PRIMARNI

$a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n \leq b_i \quad , i = 1, k$
$-a_{i1} x_1 - \dots - a_{in} x_n \leq -b_i \quad , i = k+1, r$
$a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n \leq b_i$
$-a_{i1} x_1 + \dots - a_{in} x_n \leq -b_i$

JEDNAČINU PRIKAZUJEMO KAO DVE NEJEDNAČINE

$x_j \geq 0$

TRANSFORMISANA FUNKCIJA:

DUALNI:

$\min w = \sum_{i=1}^{k} b_i y_i - \sum_{i=k+1}^{r} b_i \hat{y}_i + \sum_{i=r+1}^{m} b_i (y_i' - y_i'')$

$y_i, \hat{y}_i, y_i', y_i'' \geq 0$ (JER SU SVI USLOVI OGRANIČENJA SADA $\leq$)